

610 10/12-99

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB  
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXI, NR. 6

---

LIBRATIONSUNKTE IM  
RESTRINGIERTEN VIERKÖRPER-  
PROBLEM

VON  
PEDER PEDERSEN



KØBENHAVN  
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD  
1944

# INHALT

	Seite
Einleitung .....	3
I. Der allgemeine Fall .....	5
1. Die Differentialgleichungen der Bewegung .....	5
2. Librationspunkte .....	8
3. Lösung der Bedingungsgleichungen .....	9
II. Spezialfälle .....	14
1. Der Librationspunkt auf einer Symmetrieachse .....	14
2. Der Librationspunkt auf einer Verbindungslinie zwischen zwei Massen .....	16
3. Der Librationspunkt in der Nähe des Mittelpunktes des Massendreiecks .....	21
4. Der Librationspunkt in der Nähe einer der endlichen Massen .....	26
5. Der Librationspunkt in der Nähe eines der Punkte, die mit den Eckpunkten des Massendreiecks in Bezug auf dessen Seiten symmetrisch liegen .....	31
6. Der Librationspunkt in der Nähe eines Librationskreises .....	36
7. Die Gebiete der Librationspunkte .....	46
III. Numerische Berechnungen .....	49
1. Der Librationspunkt auf einer Symmetrieachse .....	49
2. Der Librationspunkt auf einer Verbindungslinie zwischen zwei Massen .....	52
3. Der Librationspunkt innerhalb des Massendreiecks (Gebiet I) .....	53
4. Der Librationspunkt ausserhalb des Massendreiecks (Gebiet II) .....	68
5. Der Librationspunkt ausserhalb des Massendreiecks (Gebiet III) .....	70
6. Übersicht über die numerischen Resultate .....	73

## EINLEITUNG

In einer Abhandlung aus dem Jahre 1924 hat M. LINDOW<sup>1)</sup> die Librationspunkte in dem speziellen Fall des Vierkörperproblems bestimmt, wo drei gleich grosse Massen in der relativen Bewegung in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks fest liegen, und die vierte Masse unendlich klein ist und sich in derselben Ebene bewegt wie die drei endlichen Massen. In diesem Falle findet man 10 Librationspunkte. Diese zu bestimmen ist eine recht mühsame Aufgabe, da die Bestimmung von der Lösung von Gleichungen recht hohen Grades abhängig ist.

Die vorliegende Abhandlung beabsichtigt, die Librationspunkte für willkürliche Massenverhältnisse zu bestimmen. In Analogie mit der Bezeichnung des problême restreint als das restringierte Dreikörperproblem wollen wir dieses Problem das restringierte Vierkörperproblem nennen.

Die gestellte Aufgabe wäre nicht zu bewältigen, wenn sie nach derselben Methode gelöst werden sollte, die LINDOW in dem speziellen Fall mit drei gleich grossen, endlichen Massen hat anwenden müssen. Indessen liegt die Sache nun so, dass man im allgemeinen Falle, wo die Massen willkürlich sind, die Problemstellung mit Erfolg umkehren kann: Statt die Librationspunkte von gegebenen Massenverhältnissen aus zu bestimmen, kann man die Massenverhältnisse von gegebenen Librationspunkten aus bestimmen. Denn während bei der Anwendung des erstgenannten Verfahrens die Lösung von Gleichungen recht hohen Grades verlangt wird, wird bei der Verwendung des zweiten Verfahrens nur die Lösung von Gleichungen ersten Grades verlangt.

Bei der Anwendung dieser Methode in Praxis kann man Schritt für Schritt die Librationspunkte durch die ganze Ebene

<sup>1)</sup> Der Kreisfall im Problem der  $3 + 1$  Körper, A. N. 220, 369 und in den Publikationen der Kopenhagener Sternwarte Nr. 46.

verschieben; die entsprechende Änderung der Massenverhältnisse kann dann auf eine anschauliche Weise durch die Verschiebung des gemeinsamen Schwerpunktes der Massen ausgedrückt werden. Aus einer solchen Untersuchung wird es dann hervorgehen, dass die Librationspunkte nur innerhalb bestimmter Gebiete der Ebene fallen können, und die Bestimmung dieser Gebiete wird eins der wichtigsten Resultate der Untersuchung sein.

Im Abschnitt I wird das Problem ganz allgemein behandelt werden, und es zeigt sich, dass für einen gegebenen Librationspunkt die Koordinaten des entsprechenden Schwerpunktes durch zwei Gleichungen ersten Grades bestimmt werden können.

Mit den Resultaten des Abschnitts I als Grundlage wird im Abschnitt II eine theoretische Untersuchung einer Reihe von speziellen Fällen ausgeführt.

Ebenfalls mit den Resultaten im Abschnitt I als Grundlage wird endlich im Abschnitt III eine eingehende numerische Behandlung des Problems vorgenommen.

Im allgemeinen werden nur positive Werte der endlichen Massen berücksichtigt werden, so dass ihr gemeinsamer Schwerpunkt in das von den Massen gebildete gleichseitige Dreieck fällt. In gewissen speziellen Fällen wird es jedoch der Übersicht wegen notwendig sein, auch negative Werte der Massen zu berücksichtigen, so dass ihr gemeinsamer Schwerpunkt in diesen Fällen ausserhalb des gleichseitigen Dreiecks fallen wird.

Wenn eine der endlichen Massen gegen Null strebt, wird das Problem auf das *problème restreint* reduziert, und in diesem Falle werden die Librationspunkte in die fünf bekannten Librationspunkte  $L_1, L_2, L_3, L_4$  und  $L_5$  hineinwandern. Dieser Übergang vom allgemeinen zum speziellen Fall wird gewisse Aufschlüsse über den verschiedenen Charakter dieser fünf Librationspunkte geben können.

Die vorliegende Abhandlung ist durch eine pekuniäre Unterstützung seitens des Carlsbergfonds, dem ich zu grossem Dank verpflichtet bin, ermöglicht worden. Es ist mir auch eine liebe Pflicht, an dieser Stelle Herrn Professor E. STRÖMGREN für gute Ratschläge und andere Hilfe, die für die Durchführung meiner Arbeit von wesentlicher Bedeutung waren, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

---

# I. Der allgemeine Fall.

## 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung.

Die drei endlichen Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  und eine vierte unendlich kleine Masse befinden sich in einem gegebenen Augenblick in derselben Ebene, mit Geschwindigkeiten, die in dieser Ebene liegen. Die vier Massen werden dann, wenn sie keinen anderen Einwirkungen als ihren gegenseitigen Anziehungen ausgesetzt sind, für immer in dieser Ebene bleiben. Wir wählen nun in dieser Ebene ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem und bezeichnen die Koordinaten der drei endlichen Massen in diesem Koordinatensystem mit  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  und  $(X_3, Y_3)$ , während die unendlich kleine Masse die Koordinaten  $(X, Y)$  hat. Wir bezeichnen ferner die Distanzen zwischen den endlichen Massen mit  $\varrho_{1,2}$ ,  $\varrho_{2,3}$  und  $\varrho_{1,3}$ , während  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  die Distanzen zwischen den drei endlichen Massen und der unendlich kleinen Masse bezeichnen. Indem  $k^2$  die Gravitationskonstante bezeichnet, erhalten wir die folgenden Differentialgleichungen für die Bewegung der drei endlichen Massen:

$$\left. \begin{aligned} X_1'' &= -k^2 m_2 (X_1 - X_2) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (X_1 - X_3) / \varrho_{1,3}^3, \\ Y_1'' &= -k^2 m_2 (Y_1 - Y_2) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (Y_1 - Y_3) / \varrho_{1,3}^3, \\ X_2'' &= -k^2 m_1 (X_2 - X_1) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (X_2 - X_3) / \varrho_{2,3}^3, \\ Y_2'' &= -k^2 m_1 (Y_2 - Y_1) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (Y_2 - Y_3) / \varrho_{2,3}^3, \\ X_3'' &= -k^2 m_1 (X_3 - X_1) / \varrho_{1,3}^3 - k^2 m_2 (X_3 - X_2) / \varrho_{2,3}^3, \\ Y_3'' &= -k^2 m_1 (Y_3 - Y_1) / \varrho_{1,3}^3 - k^2 m_2 (Y_3 - Y_2) / \varrho_{2,3}^3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

während die Bewegung der unendlich kleinen Masse durch die folgenden Differentialgleichungen bestimmt wird:

$$\left. \begin{aligned} X'' &= -k^2 m_1 (X - X_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (X - X_2) / \varrho_2^3 - k^2 m_3 (X - X_3) / \varrho_3^3, \\ Y'' &= -k^2 m_1 (Y - Y_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (Y - Y_2) / \varrho_2^3 - k^2 m_3 (Y - Y_3) / \varrho_3^3. \end{aligned} \right\} (2)$$

Wir ersetzen jetzt das feste Koordinatensystem  $X, Y$  durch ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $n$  rotierendes Koordinatensystem  $x, y$ . Wir erhalten dann die Transformationsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos nt - y \sin nt, \\ Y &= x \sin nt + y \cos nt. \end{aligned} \right\} (3)$$

Die Differentialgleichungen für die Bewegung der drei endlichen Massen in dem rotierenden Koordinatensystem werden nun:

$$\left. \begin{aligned} x_1'' - 2ny_1' - n^2 x_1 &= -k^2 m_2 (x_1 - x_2) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (x_1 - x_3) / \varrho_{1,3}^3, \\ y_1'' + 2nx_1' - n^2 y_1 &= -k^2 m_2 (y_1 - y_2) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (y_1 - y_3) / \varrho_{1,3}^3, \\ x_2'' - 2ny_2' - n^2 x_2 &= -k^2 m_1 (x_2 - x_1) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (x_2 - x_3) / \varrho_{2,3}^3, \\ y_2'' + 2nx_2' - n^2 y_2 &= -k^2 m_1 (y_2 - y_1) / \varrho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (y_2 - y_3) / \varrho_{2,3}^3, \\ x_3'' - 2ny_3' - n^2 x_3 &= -k^2 m_1 (x_3 - x_1) / \varrho_{1,3}^3 - k^2 m_2 (x_3 - x_2) / \varrho_{2,3}^3, \\ y_3'' + 2nx_3' - n^2 y_3 &= -k^2 m_1 (y_3 - y_1) / \varrho_{1,3}^3 - k^2 m_2 (y_3 - y_2) / \varrho_{2,3}^3, \end{aligned} \right\} (4)$$

während die Bewegung der unendlich kleinen Masse durch folgende Differentialgleichungen bestimmt wird:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2ny' - n^2 x &= -k^2 m_1 (x - x_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (x - x_2) / \varrho_2^3 \\ &\quad - k^2 m_3 (x - x_3) / \varrho_3^3, \\ y'' + 2nx' - n^2 y &= -k^2 m_1 (y - y_1) / \varrho_1^3 - k^2 m_2 (y - y_2) / \varrho_2^3 \\ &\quad - k^2 m_3 (y - y_3) / \varrho_3^3. \end{aligned} \right\} (5)$$

Wir betrachten jetzt den speziellen Fall, wo die drei endlichen Massen in dem rotierenden Koordinatensystem feste Lagen einnehmen, indem sie sich in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $\varrho$  befinden; ihre Geschwindigkeit und Akzeleration müssen dann zu jeder Zeit gleich Null sein. Wir haben deshalb:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_2' = x_3' = 0, & x_1'' &= x_2'' = x_3'' = 0, \\ y_1' &= y_2' = y_3' = 0, & y_1'' &= y_2'' = y_3'' = 0, \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\varrho_{1,2} = \varrho_{2,3} = \varrho_{1,3} = \varrho. \quad (7)$$

Aus (4) in Verbindung mit (6) und (7) erhalten wir dann:

$$\left. \begin{aligned} n^2 \varrho^3 x_1 &= k^2 m_2 (x_1 - x_2) + k^2 m_3 (x_1 - x_3), \\ n^2 \varrho^3 x_2 &= k^2 m_1 (x_2 - x_1) + k^2 m_3 (x_2 - x_3), \\ n^2 \varrho^3 x_3 &= k^2 m_1 (x_3 - x_1) + k^2 m_2 (x_3 - x_2), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} n^2 \varrho^3 y_1 &= k^2 m_2 (y_1 - y_2) + k^2 m_3 (y_1 - y_3), \\ n^2 \varrho^3 y_2 &= k^2 m_1 (y_2 - y_1) + k^2 m_3 (y_2 - y_3), \\ n^2 \varrho^3 y_3 &= k^2 m_1 (y_3 - y_1) + k^2 m_2 (y_3 - y_2), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wo (8) zur Bestimmung von  $x_1, x_2$  und  $x_3$  dienen kann, während  $y_1, y_2$  und  $y_3$  mit Hilfe von (9) bestimmt werden können.

Wenn wir nun die drei Gleichungen (8) mit bzw.  $m_1, m_2$  und  $m_3$  multiplizieren und die drei Gleichungen (9) auf entsprechende Weise behandeln, gibt Addition die zwei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Es ergibt sich aus (10), dass der gemeinsame Schwerpunkt der drei endlichen Massen in den Anfangspunkt des Koordinatensystems fallen muss.

Mit Hilfe von (10) können (8) und (9) auf folgende Gleichungssysteme reduziert werden:

$$\left. \begin{aligned} (k^2 M - n^2 \varrho^3) x_1 &= 0, \\ (k^2 M - n^2 \varrho^3) x_2 &= 0, \\ (k^2 M - n^2 \varrho^3) x_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} (k^2 M - n^2 \varrho^3) y_1 &= 0, \\ (k^2 M - n^2 \varrho^3) y_2 &= 0, \\ (k^2 M - n^2 \varrho^3) y_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wo

$$M = m_1 + m_2 + m_3. \quad (13)$$

Wir setzen jetzt voraus, dass nicht sämtliche sechs Koordinaten gleich Null sind, wonach die sechs Bedingungsgleichungen (11) und (12) auf eine einzelne Bedingungsgleichung

$$k^2M - n^2q^3 = 0 \quad (14)$$

reduziert werden.

Unter den im vorhergehenden gemachten Voraussetzungen gilt also folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x'_2 = x'_3 = 0, \\ y'_1 &= y'_2 = y'_3 = 0, \\ \varrho_{1,2} &= \varrho_{2,3} = \varrho_{1,3} = \varrho, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0, \\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0, \\ k^2M - n^2q^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

## 2. Librationspunkte.

Nachdem wir nun nachgewiesen haben, dass die drei endlichen Massen unter ihren gegenseitigen Anziehungen für immer in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks verbleiben können, so dass sie in einem Koordinatensystem, das seinen Anfangspunkt in dem gemeinsamen Schwerpunkt der Massen hat, und das mit einer passenden Winkelgeschwindigkeit rotiert, feste Stellungen einnehmen, wollen wir die Bedingung dafür finden, dass die unendlich kleine Masse auch eine feste Stellung in dem rotierenden Koordinatensystem einnimmt; wir wollen mit anderen Worten die Librationspunkte, die den drei endlichen Massen entsprechen, bestimmen. Ist der Punkt  $(x, y)$  ein Librationspunkt, so haben wir zu jeder Zeit

$$\left. \begin{aligned} x' &= 0, & x'' &= 0, \\ y' &= 0, & y'' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

die, in die Differentialgleichungen (5) für die Bewegung der unendlich kleinen Masse eingesetzt, folgende zwei Bedingungsgleichungen ergeben:

$$\left. \begin{aligned} k^2m_1(x - x_1) / \varrho_1^3 + k^2m_2(x - x_2) / \varrho_2^3 + k^2m_3(x - x_3) / \varrho_3^3 &= n^2x, \\ k^2m_1(y - y_1) / \varrho_1^3 + k^2m_2(y - y_2) / \varrho_2^3 + k^2m_3(y - y_3) / \varrho_3^3 &= n^2y, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



wo

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \\ \varrho_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ \varrho_3^2 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2. \end{aligned} \right\} (18)$$

Wird in (17) der Wert für  $n^2$  aus der Gleichung (14) eingesetzt, so kann die Gravitationskonstante  $k^2$  aus den zwei Gleichungen fortdividiert werden, und hierdurch entstehen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} m_1(x - x_1) / \varrho_1^3 + m_2(x - x_2) / \varrho_2^3 + m_3(x - x_3) / \varrho_3^3 &= Mx / \varrho^3, \\ m_1(y - y_1) / \varrho_1^3 + m_2(y - y_2) / \varrho_2^3 + m_3(y - y_3) / \varrho_3^3 &= My / \varrho^3. \end{aligned} \right\} (19)$$

Wir führen nun in die zwei Bedingungsgleichungen die relativen Massen  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$  ein, die durch die Gleichungen

$$\mu_1 = m_1 / M, \quad \mu_2 = m_2 / M, \quad \mu_3 = m_3 / M \quad (20)$$

definiert werden, so dass wir

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \quad (21)$$

haben.

Hierdurch entstehen die zwei neuen Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(x - x_1) / \varrho_1^3 + \mu_2(x - x_2) / \varrho_2^3 + \mu_3(x - x_3) &= x / \varrho^3, \\ \mu_1(y - y_1) / \varrho_1^3 + \mu_2(y - y_2) / \varrho_2^3 + \mu_3(y - y_3) &= y / \varrho^3. \end{aligned} \right\} (22)$$

Das Problem, die Librationspunkte zu bestimmen, ist damit von einem dynamischen Problem auf ein rein mathematisches Problem reduziert worden. Das zeigt sich u. a. dadurch, dass die zwei Bedingungsgleichungen von den Einheiten der Masse und der Zeit unabhängig sind. Was die Einheit der Länge betrifft, werden wir später eine für das vorliegende Problem bequeme Längeneinheit wählen.

### 3. Lösung der Bedingungsgleichungen.

Bei der Behandlung der zwei Bedingungsgleichungen (22) in Verbindung mit den Gleichungen (18) und (21) kann man nach zwei verschiedenen Verfahren vorgehen.

In die erwähnten Gleichungen gehen ein:

1. Die Koordinaten der drei endlichen Massen; diese Koordinaten sind bekannte Grössen.
2. Die Koordinaten  $x$  und  $y$  der Librationspunkte.
3. Die relativen Massen  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$ .

Wenn die relativen Massen bekannt sind, werden die zwei Bedingungsgleichungen dazu dienen können, die Koordinaten  $x$  und  $y$  der Librationspunkte zu bestimmen. Da aber  $x$  und  $y$  sowohl explicite in die Zähler als implicite in die Nenner der Brüche eingehen, wird die Bestimmung von  $x$  und  $y$  sehr schwierig werden, und es werden sich gewöhnlich viele Lösungen ergeben. Einem bestimmten Satz von Werten der relativen Massen entspricht indessen eine bestimmte Lage des gemeinsamen Schwerpunktes, und wir erhalten deshalb das folgende Resultat: Einer bestimmten Lage des Schwerpunktes entsprechen gewöhnlich mehrere Librationspunkte.

Ist dagegen die Lage eines Librationspunktes und damit  $x$  und  $y$  bekannt, werden die zwei Bedingungsgleichungen in Verbindung mit Gleichung (21) zur Bestimmung der relativen Massen  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  dienen können. Da die drei Gleichungen in diesen Grössen linear sind, werden die Gleichungen leicht gelöst werden können, und sie werden im allgemeinen einen und nur einen Satz von Werten der relativen Massen und damit eine bestimmte Lage des Schwerpunktes ergeben. Wir erhalten deshalb: Einer bestimmten Lage eines Librationspunktes entspricht gewöhnlich ein und nur ein Schwerpunkt.

Hiermit ist die Grundlage für die folgende Behandlung der zwei Bedingungsgleichungen gegeben. Wir wollen in diesen Gleichungen  $x$  und  $y$  als bekannte Grössen auffassen, während  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  unbekannte Grössen sind. Die in  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  linearen Gleichungen wollen wir auf eine möglichst einfache Form zu bringen suchen.

Wir denken uns das gleichseitige Dreieck (Massendreieck) auf einfache Weise in dem rotierenden Koordinatensystem  $x, y$  orientiert, indem die Verbindungslinie  $M_2M_3$  zwischen den Massen  $m_2$  und  $m_3$  als parallel mit der Ordinatenachse vorausgesetzt wird (Abb. 1). Mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt des Massendreiecks und mit Achsen, die mit der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse parallel sind, wird ein neues Koordinatensystem  $\xi, \eta$  eingeführt.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Anfangspunktes des Koordinatensystems  $x, y$  in dem neuen Koordinatensystem mit  $\sigma, \tau$ ; der Übergang von dem einen System von Koordinaten zum anderen findet dann mit Hilfe der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sigma + x, \\ \eta &= \tau + y \end{aligned} \right\} (23)$$

statt.

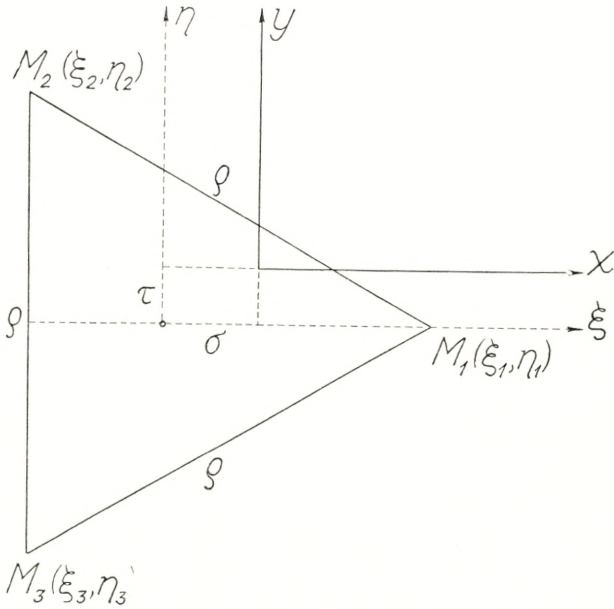


Abb. 1.

$\sigma$  und  $\tau$ , d. h. die Koordinaten des Schwerpunktes im neuen Koordinatensystem  $\xi, \eta$ , können mit Hilfe der relativen Massen  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$  ausgedrückt werden. Man findet leicht:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{6} \sqrt{3} (3\mu_1 - 1) \rho, \\ \tau &= \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_3) \rho. \end{aligned} \right\} (24)$$

Umgekehrt können  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$  mit Hilfe der Koordinaten des Schwerpunktes  $\sigma$  und  $\tau$  ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{3} \sigma / \varrho, \\ \mu_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{3} \sigma / \varrho + \tau / \varrho, \\ \mu_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{3} \sigma / \varrho - \tau / \varrho. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Statt  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  als unbekannte Grössen zu behandeln können wir  $\sigma$  und  $\tau$  als Unbekannte betrachten. Aus den zwei Bedingungsgleichungen (22) in Verbindung mit (23) und (25) erhalten wir zur Bestimmung von  $\sigma$  und  $\tau$  folgende zwei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{1}{3} \sqrt{3} \left( 2 \frac{\xi - \xi_1}{\varrho_1^3} - \frac{\xi - \xi_2}{\varrho_2^3} - \frac{\xi - \xi_3}{\varrho_3^3} \right) + \frac{1}{\varrho^3} \right] \sigma + \left[ \frac{\xi - \xi_2}{\varrho_2^3} - \frac{\xi - \xi_3}{\varrho_3^3} \right] \tau \\ = \frac{\xi}{\varrho^2} - \frac{\varrho}{3} \left[ \frac{\xi - \xi_1}{\varrho_1^3} + \frac{\xi - \xi_2}{\varrho_2^3} + \frac{\xi - \xi_3}{\varrho_3^3} \right], \\ \left[ \frac{1}{3} \sqrt{3} \left( 2 \frac{\eta - \eta_1}{\varrho_1^3} - \frac{\eta - \eta_2}{\varrho_2^3} - \frac{\eta - \eta_3}{\varrho_3^3} \right) \right] \sigma + \left[ \frac{\eta - \eta_2}{\varrho_2^3} - \frac{\eta - \eta_3}{\varrho_3^3} + \frac{1}{\varrho^2} \right] \tau \\ = \frac{\eta}{\varrho^2} - \frac{\varrho}{3} \left[ \frac{\eta - \eta_1}{\varrho_1^3} + \frac{\eta - \eta_2}{\varrho_2^3} + \frac{\eta - \eta_3}{\varrho_3^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2, \\ \varrho_2^2 &= (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2, \\ \varrho_3^2 &= (\xi - \xi_3)^2 + (\eta - \eta_3)^2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Der Kürze wegen schreiben wir jetzt

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\xi - \xi_1}{\varrho_1^3}, & \alpha_2 &= \frac{\xi - \xi_2}{\varrho_2^3}, & \alpha_3 &= \frac{\xi - \xi_3}{\varrho_3^3}, \\ \beta_1 &= \frac{\eta - \eta_1}{\varrho_1^3}, & \beta_2 &= \frac{\eta - \eta_2}{\varrho_2^3}, & \beta_3 &= \frac{\eta - \eta_3}{\varrho_3^3}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wonach die Gleichungen zur Bestimmung von  $\sigma$  und  $\tau$  die einfachere Form

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{1}{3} \sqrt{3} (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + \frac{1}{\varrho^2} \right] \sigma + \left[ \alpha_2 - \alpha_3 \right] \tau &= \frac{\xi}{\varrho^2} - \frac{\varrho}{3} \left[ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \right], \\ \left[ \frac{1}{3} \sqrt{3} (2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \right] \sigma + \left[ \beta_2 - \beta_3 + \frac{1}{\varrho^2} \right] \tau &= \frac{\eta}{\varrho^2} - \frac{\varrho}{3} \left[ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \right] \end{aligned} \right\} (29)$$

erhalten.

Eine weitere Vereinfachung kann jetzt dadurch stattfinden, dass eine bestimmte Längeneinheit festgelegt wird. Es wird bequem sein, als Längeneinheit den Radius des dem Massendreieck umschriebenen Kreises zu wählen; für die Seite  $\varrho$  des Massendreiecks erhalten wir dann

$$\varrho = \sqrt{3}. \quad (30)$$

Die Koordinaten der drei endlichen Massen werden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2}, \quad \xi_3 = -\frac{1}{2}, \\ \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \eta_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \end{aligned} \right\} (31)$$

während die Gleichungen zur Bestimmung von  $\sigma$  und  $\tau$  jetzt die einfachere Form

$$\left. \begin{aligned} [1 + \sqrt{3} (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)] \sigma + 3 [\alpha_2 - \alpha_3] \tau &= \xi - \sqrt{3} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad (I) \\ [\sqrt{3} (2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)] \sigma + [1 + 3 (\beta_2 - \beta_3)] \tau &= \eta - \sqrt{3} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \quad (II) \end{aligned} \right\} (32)$$

erhalten.

Diese zwei Gleichungen, die die Grundlage sowohl der theoretischen als der numerischen Behandlung des vorliegenden Problems bilden, werden im folgenden mit römisch I und II bezeichnet werden. Der Übersicht wegen geben wir jetzt eine Zusammenstellung der Formeln in der Reihenfolge, in der sie benutzt werden sollen, wenn man für einen gegebenen Librationspunkt mit den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  den entsprechenden Schwerpunkt mit den Koordinaten  $\sigma$  und  $\tau$  bestimmen will.

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= (\xi - 1)^2 + \eta^2, \\ \varrho_2^2 &= \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \eta - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)^2, \\ \varrho_3^2 &= \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \eta + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)^2. \end{aligned} \right\} (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\xi - 1}{\varrho_1^3}, & \alpha_2 &= \frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varrho_2^3}, & \alpha_3 &= \frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varrho_3^3}, \\ \beta_1 &= \frac{\eta}{\varrho_1^3}, & \beta_2 &= \frac{\eta - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\varrho_2^3}, & \beta_3 &= \frac{\eta + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\varrho_3^3}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 + \sqrt{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3), \\ B_1 &= 3(\alpha_2 - \alpha_3), \\ C_1 &= \xi - \sqrt{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ A_2 &= \sqrt{3}(2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3), \\ B_2 &= 1 + 3(\beta_2 - \beta_3), \\ C_2 &= \eta - \sqrt{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1\sigma + B_1\tau &= C_1, \\ A_2\sigma + B_2\tau &= C_2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Bestimmung von  $\sigma$  und  $\tau$  erfolgt, wie es sich aus dieser Zusammenstellung ergibt, in vier Schritten. Zunächst werden  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  aus (33), dann  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  aus (34) bestimmt; nachher können  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  und  $C_2$  aus (35) abgeleitet werden; zum Schluss werden  $\sigma$  und  $\tau$  durch Lösung der zwei linearen Gleichungen (36) bestimmt.

## II. Spezialfälle.

### 1. Der Librationspunkt auf einer Symmetrieachse.

Wir wollen jetzt den speziellen Fall betrachten, wo der Librationspunkt auf eine der Symmetrieachsen des Massendreiecks fällt. Liegt der Librationspunkt auf der Symmetrieachse durch  $M_1$  (der  $\xi$ -Achse), haben wir  $\eta = 0$ , woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= (\xi - 1)^2, \\ \varrho_2^2 &= \varrho_3^2 = 1 + \xi + \xi^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\xi - 1}{\varrho_1^3}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varrho_2^3}, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = -\beta_3 = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\varrho_2^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 + 2\sqrt{3}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ B_1 &= 0, \\ C_1 &= \xi - \sqrt{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \\ A_2 &= 0, \\ B_2 &= 1 + 6\beta_2, \\ C_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von  $\sigma$  und  $\tau$  werden deshalb auf

$$\left. \begin{aligned} [1 + 2\sqrt{3}(\alpha_1 - \alpha_2)]\sigma &= \xi - \sqrt{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \quad (I) \\ [1 + 6\beta_2]\tau &= 0 \quad (II) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

reduziert, so dass  $\sigma$  aus I und  $\tau$  aus II bestimmt werden können. Wird  $1 + 6\beta_2 \neq 0$  vorausgesetzt, erhalten wir aus Gleichung II  $\tau = 0$ , und dies bedeutet, dass der Schwerpunkt, ebenso wie der Librationspunkt, auf der Symmetrieachse liegt. Die Abszisse des Schwerpunktes wird dann durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{\xi - \sqrt{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)}{1 + 2\sqrt{3}(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad \left. \right\} \quad (5)$$

bestimmt.

Ist  $1 + 6\beta_2 = 0$ , braucht  $\tau$  nicht gleich Null zu sein, und der Schwerpunkt kann dann ausserhalb der Symmetrieachse fallen. Aus  $1 + 6\beta_2 = 0$  folgt  $\varrho_2 = \sqrt{3}$ , was wiederum zur Folge hat, dass entweder  $\xi = 1$  oder  $\xi = -2$  ist. Sowohl für  $\xi = 1$  als für  $\xi = -2$  erhalten wir aus (5)  $\sigma = -\frac{1}{2}$ . Es geht hieraus hervor, dass, wenn der Librationspunkt mit den Massen  $m_2$  und  $m_3$  die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bildet, der Schwerpunkt

auf der Verbindungslinie zwischen  $m_2$  und  $m_3$  liegen wird. Die Masse  $m_1$  ist in diesem Falle Null, und das Vierkörperproblem ist auf einen bekannten Spezialfall des Dreikörperproblems (das problème restreint) reduziert worden. Die Librationspunkte in  $\xi = 1$  und  $\xi = -2$  auf der Symmetrieachse entsprechen den Librationspunkten  $L_4$  und  $L_5$  im problème restreint.

Verhältnisse, die den für die Symmetrieachse durch die Masse  $m_1$  gefundenen entsprechen, müssen auch für die Symmetrieachsen durch die Massen  $m_2$  und  $m_3$  gelten. Es gilt deshalb folgende Regel:

Wenn der Librationspunkt auf eine der Symmetrieachsen des Massendreiecks fällt, wird der entsprechende Schwerpunkt im allgemeinen auf dieselbe Symmetrieachse fallen. Nur wenn der Librationspunkt mit zwei der endlichen Massen die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bildet, kann der entsprechende Schwerpunkt ausserhalb der Symmetrieachse fallen, und er wird dann auf die Seite des Dreiecks fallen, welche die zwei endlichen Massen verbindet.

## 2. Der Librationspunkt auf einer Verbindungslinie zwischen zwei Massen.

Wir gehen jetzt dazu über, den Fall zu behandeln, wo der Librationspunkt auf eine der drei Verbindungslinien zwischen den drei endlichen Massen fällt. Die Rechnung wird am einfachsten, wenn der Librationspunkt sich auf der Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_2$  und  $m_3$  befindet, in welchem Falle  $\xi = -\frac{1}{2}$  ist.

Es wird praktisch sein, die Untersuchung in 5 Teile einzuteilen, je nachdem

$$1^\circ. \quad -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \eta < \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$2^\circ. \quad \eta > \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$3^\circ. \quad \eta < -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$



$$4^\circ. \quad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$5^\circ. \quad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

In dem ersten Fall liegt der Librationspunkt zwischen  $m_2$  und  $m_3$ , im zweiten und dritten Fall auf den Verlängerungen der Dreiecksseite, während er im vierten und fünften Fall in den Massen  $m_2$  und  $m_3$  selbst liegt.

Die Bestimmung von  $\sigma$  wird in den drei ersten Fällen dieselbe sein, weshalb diese Bestimmung ausgeführt werden wird, ehe die einzelnen Fälle jede für sich betrachtet werden.

In den drei ersten Fällen erhalten wir:

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \tag{6}$$

so dass Gleichung I zur Bestimmung von  $\sigma$

$$(1 + 2\sqrt{3}\alpha_1)\sigma = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\alpha_1 \tag{7}$$

wird, woraus sich

$$\sigma = -\frac{1}{2} \tag{8}$$

ergibt.

$$1^\circ. \quad \underline{-\frac{1}{2}\sqrt{3} < \eta < \frac{1}{2}\sqrt{3}.}$$

Für  $\xi = -\frac{1}{2}$  und unter der gegebenen Voraussetzung erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= \frac{9}{4} + \eta^2, \\ \varrho_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} - \eta, \\ \varrho_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \eta, \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$\beta_1 = \frac{\eta}{\varrho_1^3}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\varrho_2^2}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\varrho_3^2}. \tag{10}$$

Aus Gleichung II findet man danach den folgenden Wert für  $\tau$ :

$$\tau = \frac{16\eta^5 - 24\eta^3 + 153\eta}{16\eta^4 - 120\eta^2 - 63}. \quad (11)$$

2°.  $\eta > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Für  $\xi = -\frac{1}{2}$  und unter der gegebenen Voraussetzung erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= \frac{9}{4} + \eta^2, \\ \varrho_2 &= \eta - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \varrho_3 &= \eta + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\beta_1 = \frac{\eta}{\varrho_1^2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\varrho_2^2}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\varrho_3^2}. \quad (13)$$

Aus Gleichung II findet man danach den folgenden Wert für  $\tau$ :

$$\tau = \eta - \frac{27\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\left(\eta^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 18\eta}. \quad (14)$$

3°.  $\eta < -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Für  $\xi = -\frac{1}{2}$  und unter der gegebenen Voraussetzung erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= \frac{9}{4} + \eta^2, \\ \varrho_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} - \eta, \\ \varrho_3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \eta, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\beta_1 = \frac{\eta}{\varrho_1^3}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\varrho_2^2}, \quad \beta_3 = -\frac{1}{\varrho_3^2}. \quad (16)$$

Aus Gleichung II findet man danach den folgenden Wert für  $\tau$ :

$$\tau = \eta + \frac{27 \left( \eta^2 + \frac{1}{4} \right)}{\sqrt{3} \left( \eta^2 - \frac{3}{4} \right)^2 - 18 \eta}. \quad (17)$$

4°. 
$$\underline{\eta = \frac{1}{2} \sqrt{3}}.$$

Mit den Werten  $\xi = -\frac{1}{2}$  und  $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{3}$  erhalten wir

$$\varrho_1 = \sqrt{3}, \quad \varrho_2 = 0, \quad \varrho_3 = \sqrt{3}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{6} \sqrt{3}, & \alpha_3 &= 0, \\ \beta_1 &= \frac{1}{6}, & \beta_3 &= \frac{1}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

während  $\alpha_2$  und  $\beta_2$  unbestimmt bleiben.

Wenn wir die Werte für  $\alpha_1$  und  $\alpha_3$  in I einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$-\sqrt{3} \alpha_2 \sigma + 3 \alpha_2 \tau = -\sqrt{3} \alpha_2, \quad (20)$$

die nach Division durch die unbestimmte Grösse  $\alpha_2$  in

$$\sigma - \sqrt{3} \tau = 1 \quad (21)$$

umschrieben werden kann. Dies ist die Gleichung für die Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_1$  und  $m_3$ .

Wenn wir dann die Werte für  $\beta_1$  und  $\beta_3$  in II einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$-\sqrt{3} \beta_2 \sigma + 3 \beta_2 \tau = -\sqrt{3} \beta_2, \quad (22)$$

die nach Division durch die unbestimmte Grösse  $\beta_2$  in

$$\sigma - \sqrt{3} \tau = 1 \quad (23)$$

umschrieben werden kann, d. h. dieselbe Gleichung, die sich aus Gleichung I ergab. Hieraus geht hervor, dass, wenn der Librationspunkt in der Masse  $m_2$  liegt, der Schwerpunkt in einem willkürlichen Punkt auf der Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_1$  und  $m_3$  liegen kann. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit dem früher gefundenen.

$$5^\circ. \quad \underline{\eta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

Mit den Werten  $\xi = -\frac{1}{2}$  und  $\eta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$  erhalten wir

$$\varrho_1 = \sqrt{3}, \quad \varrho_2 = \sqrt{3}, \quad \varrho_3 = 0, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{6}\sqrt{3}, & \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 &= -\frac{1}{6}, & \beta_2 &= -\frac{1}{3}, \end{aligned} \right\} (25)$$

während  $\alpha_3$  und  $\beta_3$  unbestimmt bleiben.

Setzen wir die gefundenen Werten in I und II ein, erhalten wir in beiden Fällen die Gleichung

$$\sigma + \sqrt{3}\tau = 1, \quad (26)$$

das ist die Gleichung für die Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Hieraus geht hervor, dass, wenn der Librationspunkt in der Masse  $m_3$  liegt, der Schwerpunkt in einem willkürlichen Punkte auf der Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_1$  und  $m_2$  liegen kann.

---

Verhältnisse, die den für die Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_2$  und  $m_3$  gefundenen entsprechen, müssen auch für die zwei anderen Verbindungslinien zwischen den Massen gelten.

Es gilt deshalb folgende Regel:

Wenn der Librationspunkt auf eine der Verbindungslinien zwischen den Massen fällt, wird der Schwerpunkt im allgemeinen auf dieselbe Linie fallen. Nur wenn der Librationspunkt in einen der Eckpunkte des Massendreiecks fällt, kann der Schwerpunkt ausserhalb dieser Linie fallen, und er wird dann in einen willkürlichen Punkt auf der Seite fallen können, die die zwei anderen Eckpunkte des Dreiecks verbindet.

### 3. Der Librationspunkt in der Nähe des Mittelpunktes des Massendreiecks.

Wenn der Librationspunkt sich im Mittelpunkt des Massendreiecks befindet, wird der Schwerpunkt mit dem Librationspunkt zusammenfallen. Für  $\xi = 0$  und  $\eta = 0$  erhalten wir nämlich:

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1, \tag{27}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -1, & \alpha_2 &= \frac{1}{2}, & \alpha_3 &= \frac{1}{2}, \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}, & \beta_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}, \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 - 3\sqrt{3}, & B_1 &= 0, & C_1 &= 0, \\ A_2 &= 0, & B_2 &= 1 - 3\sqrt{3}, & C_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

so dass die Gleichungen zur Bestimmung von  $\sigma$  und  $\tau$

$$\left. \begin{aligned} (1 - 3\sqrt{3})\sigma &= 0, \\ (1 - 3\sqrt{3})\tau &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

oder

$$\sigma = 0, \quad \tau = 0 \tag{31}$$

werden.

Wir denken uns jetzt, dass sich der Librationspunkt in unmittelbarer Nähe des Mittelpunktes des Massendreiecks befindet, und setzen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi, \\ \eta &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (32)$$

wo  $r$  die Distanz des Librationspunktes vom Mittelpunkt bezeichnet. Wir betrachten  $r$  als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung. Da die Koordinaten  $\sigma$  und  $\tau$  des Schwerpunktes, die auch unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, aus den zwei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A_1 \sigma + B_1 \tau &= C_1, \\ A_2 \sigma + B_2 \tau &= C_2 \end{aligned} \right\} (33)$$

bestimmt werden sollen, sieht man, dass die Ordnung, bis zu welcher  $C_1$  und  $C_2$  berechnet werden sollen, um 1 grösser sein muss als die Ordnung, bis zu der die vier Koeffizienten berechnet werden sollen. Wir wollen  $A_1, B_1, A_2$  und  $B_2$  bis zu Gliedern zweiter Ordnung,  $C_1$  und  $C_2$  bis zu Gliedern dritter Ordnung berechnen. Wir finden:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= 1 - 2 \cos \varphi \cdot r + r^2, \\ \varrho_2^2 &= 1 + (\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) r + r^2, \\ \varrho_3^2 &= 1 + (\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) r + r^2, \end{aligned} \right\} (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 - 2 \cos \varphi \cdot r - \frac{3}{4} (1 + 3 \cos 2 \varphi) r^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (3 \cos \varphi + 5 \cos 3 \varphi) r^3, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos \varphi + 3 \sqrt{3} \sin \varphi) r + \frac{3}{16} (2 - 9 \cos 2 \varphi - \sqrt{3} \sin 2 \varphi) r^2 \\ &\quad + \frac{1}{32} (-3 \cos \varphi + 15 \sqrt{3} \sin \varphi + 40 \cos 3 \varphi - 30 \sqrt{3} \sin 3 \varphi) r^3, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos \varphi - 3 \sqrt{3} \sin \varphi) r + \frac{3}{16} (2 - 9 \cos 2 \varphi + \sqrt{3} \sin 2 \varphi) r^2 \\ &\quad + \frac{1}{32} (-3 \cos \varphi - 15 \sqrt{3} \sin \varphi + 40 \cos 3 \varphi + 30 \sqrt{3} \sin 3 \varphi) r^3, \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_1 &= \sin \varphi \cdot r + \frac{3}{2} \sin 2 \varphi \cdot r^2 + \frac{3}{8} (\sin \varphi + 5 \sin 3 \varphi) r^3, \\
 \beta_2 &= -\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{4} (3 \sqrt{3} \cos \varphi - 5 \sin \varphi) r \\
 &\quad - \frac{3}{16} (2 \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2 \varphi - 11 \sin 2 \varphi) r^2 \\
 &\quad + \frac{1}{32} (15 \sqrt{3} \cos \varphi - 33 \sin \varphi \\
 &\quad - 40 \sqrt{3} \cos 3 \varphi - 30 \sin 3 \varphi) r^3, \\
 \beta_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{4} (3 \sqrt{3} \cos \varphi + 5 \sin \varphi) r \\
 &\quad + \frac{3}{16} (2 \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2 \varphi + 11 \sin 2 \varphi) r^2 \\
 &\quad - \frac{1}{32} (15 \sqrt{3} \cos \varphi + 33 \sin \varphi \\
 &\quad - 40 \sqrt{3} \cos 3 \varphi + 30 \sin 3 \varphi) r^3,
 \end{aligned} \right\} (36)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= 1 - 3 \sqrt{3} \left( 1 + \frac{3}{2} \cos \varphi \cdot r + \frac{3}{8} (2 + \cos 2 \varphi) r^2 \right), \\
 B_1 &= \frac{9}{2} \sqrt{3} \left( \sin \varphi \cdot r - \frac{1}{4} \sin 2 \varphi \cdot r^2 \right), \\
 C_1 &\Rightarrow \left( 1 + \frac{3}{2} \sqrt{3} \right) \cos \varphi \cdot r + \frac{45}{8} \sqrt{3} \cos 2 \varphi \cdot r^2 + \frac{27}{16} \sqrt{3} \cos \varphi \cdot r^3,
 \end{aligned} \right\} (37)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_2 &= \frac{9}{2} \sqrt{3} \left( \sin \varphi \cdot r - \frac{1}{4} \sin 2 \varphi \cdot r^2 \right), \\
 B_2 &= 1 - 3 \sqrt{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \cos \varphi \cdot r + \frac{3}{8} (2 - \cos 2 \varphi) r^2 \right), \\
 C_2 &= \left( 1 + \frac{3}{2} \sqrt{3} \right) \sin \varphi \cdot r - \frac{45}{8} \sqrt{3} \sin 2 \varphi \cdot r^2 + \frac{27}{16} \sqrt{3} \sin \varphi \cdot r^3.
 \end{aligned} \right\} (38)$$

Die zwei unbekanntenen Grössen  $\sigma$  und  $\tau$  können jetzt aus den Gleichungen I und II durch wiederholte Annäherungen bestimmt werden. Nimmt man in erster Annäherung nur Glieder erster Ordnung in Gleichung I mit, kann das Glied  $B_1 \tau$ , das zweiter

Ordnung wird, weggelassen werden, wonach das Glied erster Ordnung in der Reihenentwicklung für  $\sigma$  durch Gleichung I bestimmt werden kann. Mit dem gefundenen Wert für  $\sigma$  kann das Glied zweiter Ordnung in  $A_2\sigma$  berechnet werden, wonach Gleichung II das Glied erster Ordnung in der Reihenentwicklung für  $\tau$  ergibt. Den gefundenen Wert für  $\tau$  setzt man dann in Gleichung I ein, wobei  $\sigma$  bis zu Gliedern zweiter Ordnung bestimmt werden kann, und in der Weise fährt man fort, bis  $\sigma$  und  $\tau$  bis zu Gliedern dritter Ordnung bestimmt sind. Das Resultat wird:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{29+9\sqrt{3}}{52} \cos \varphi \cdot r - \frac{2673-405\sqrt{3}}{2704} \cos 2\varphi \cdot r^2 \\ &\quad + \frac{56133+5184\sqrt{3}}{35152} \cos \varphi \cdot r^3, \\ \tau &= -\frac{29+9\sqrt{3}}{52} \sin \varphi \cdot r + \frac{2673-405\sqrt{3}}{2704} \sin 2\varphi \cdot r^2 \\ &\quad + \frac{56133+5184\sqrt{3}}{35152} \sin \varphi \cdot r^3. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Es sei bemerkt, dass die Zahlenkoeffizienten in den zwei Reihenentwicklungen numerisch dieselben sind. Wenn wir die Zahlenkoeffizienten mit 6 Dezimalen berechnen, so erhalten wir folgende zwei Reihenentwicklungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -0.857470 \cos \varphi \cdot r - 0.729112 \cos 2\varphi \cdot r^2 \\ &\quad + 1.852297 \cos \varphi \cdot r^3, \\ \tau &= -0.857470 \sin \varphi \cdot r + 0.729112 \sin 2\varphi \cdot r^2 \\ &\quad + 1.852297 \sin \varphi \cdot r^3. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Wird  $r$  als konstant betrachtet, während  $\varphi$  variiert, so wird der Librationspunkt einen Kreis mit dem Zentrum im Mittelpunkt des Massendreiecks und mit dem Radius  $r$  durchlaufen. Der Schwerpunkt wird dann in erster Annäherung einen mit dem Kreise des Librationspunktes konzentrischen Kreis durchlaufen, jedoch mit einem etwas kleineren Radius; ferner werden die Lagen des Librationspunktes und des Schwerpunktes in den Kreisen um  $180^\circ$  gegeneinander verschoben sein. Das Resultat wird mit anderen Worten:



Eine kleine Verschiebung des Librationspunktes vom Mittelpunkt des Dreiecks hat eine Verschiebung des Schwerpunktes zur Folge, die in entgegengesetzter Richtung vor sich geht, und die  $\frac{29 + 9\sqrt{3}}{52}$  mal so gross ist wie die Verschiebung des Librationspunktes.

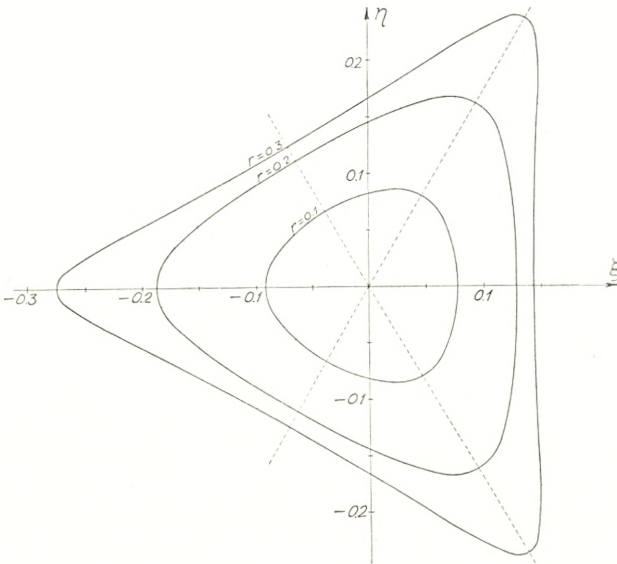


Abb. 2.

Abb. 2 zeigt drei Schwerpunktskurven, die drei verschiedenen  $r$ -Werten entsprechen; die Kurvenpunkte sind mit Hilfe von den Gleichungen (40) berechnet. Die Kurven haben, ebenso wie das Massendreieck, 3 Symmetrieachsen. Bei der äussersten der drei Kurven ist die Abweichung zwischen der berechneten Kurve und der wirklichen Kurve schon ziemlich bedeutend. Numerische Berechnungen, die in Abschnitt III erwähnt werden, zeigen, wie sich die weitere Entwicklung der Kurve gestaltet. Für einen gewissen Wert von  $r$  zwischen 0.3 und 0.4 erhält die Kurve drei Spitzen, die gegen die Mittelpunkte der Dreiecksseiten gerichtet sind, und für noch grössere Werte von  $r$  ergeben sich drei Schleifen.

#### 4. Der Librationspunkt in der Nähe einer der endlichen Massen.

Wenn der Librationspunkt gerade mit einer der drei endlichen Massen zusammenfällt, muss, wie wir früher gesehen haben, diese Masse gleich Null sein, und der Schwerpunkt muss auf derjenigen Dreiecksseite liegen, die die zwei anderen Massen verbindet. Wir wollen jetzt die Lage des Schwerpunktes untersuchen, wenn der Librationspunkt sich in der Nähe der Masse  $m_1$  befindet. Wir setzen in diesem Fall

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 + r \cos \varphi, \\ \eta &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

wo wir  $r$  als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachten. Mit diesen Werten für  $\xi$  und  $\eta$  erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= r, \\ \varrho_2^2 &= 3 + (3 \cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) r + r^2, \\ \varrho_3^2 &= 3 + (3 \cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) r + r^2. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Hieraus ergibt sich ferner, indem in den Reihenentwicklungen nur Glieder erster Ordnung mitgenommen werden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \varphi \cdot r^{-2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{6} \sqrt{3} + \frac{1}{36} (-5 \sqrt{3} \cos \varphi + 9 \sin \varphi) r, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{6} \sqrt{3} + \frac{1}{36} (-5 \sqrt{3} \cos \varphi - 9 \sin \varphi) r, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \sin \varphi \cdot r^{-2}, \\ \beta_2 &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{36} (9 \cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) r, \\ \beta_3 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{36} (-9 \cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) r, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2\sqrt{3} \cos \varphi \cdot r^{-2} + \frac{5}{6} \cos \varphi \cdot r, \\ B_1 &= \frac{3}{2} \sin \varphi \cdot r, \\ C_1 &= -\sqrt{3} \cos \varphi \cdot r^{-2} + \frac{11}{6} \cos \varphi \cdot r, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= 2\sqrt{3} \sin \varphi \cdot r^{-2} - \frac{1}{6} \sin \varphi \cdot r, \\ B_2 &= \frac{3}{2} \cos \varphi \cdot r, \\ C_2 &= -\sqrt{3} \sin \varphi \cdot r^{-2} + \frac{5}{6} \sin \varphi \cdot r. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Es geht aus den gefundenen Ausdrücken hervor, dass  $B_1$  und  $B_2$  erster Ordnung werden,  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$  und  $C_2$  aber der Ordnung  $-2$ . Da sowohl  $\sigma$  als  $\tau$  in diesem speziellen Fall endliche Grössen — also von der Ordnung  $0$  — sind, werden die Glieder  $B_1 \tau$  und  $B_2 \tau$  in den Gleichungen I und II einer Ordnung werden, die um  $3$  höher ist als die der übrigen Glieder. Diese zwei Glieder können deshalb in der ersten Annäherung weggelassen werden, wonach  $\sigma$  aus jeder Gleichung für sich bestimmt werden kann. Wir finden in beiden Fällen:

$$\sigma = -\frac{1}{2}. \quad (47)$$

Um einen genaueren Wert für  $\sigma$  zu finden, und um den Wert von  $\tau$  zu bestimmen, nehmen wir jetzt in I und II Glieder erster Ordnung mit, d. h. wir benutzen die in (45) und (46) gegebenen Ausdrücke für die Koeffizienten. Durch Multiplikation von I mit  $\cos \varphi$  und von II mit  $-\sin \varphi$  und darauffolgende Addition wird  $\tau$  eliminiert, und für  $\sigma$  erhalten wir dann nach einer kleinen Reduktion:

$$\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}(1 + 2 \cos 2\varphi)}{8 \cos 2\varphi} r^3. \quad (48)$$

Wenn wir den Wert von  $\sigma$  in eine der zwei Bedingungs-  
gleichungen einsetzen, erhalten wir:

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2 \varphi. \quad (49)$$

Soll der gefundene Schwerpunkt in das Massendreieck oder  
auf seine Begrenzung fallen, müssen die folgenden zwei Bedin-  
gungen gleichzeitig erfüllt sein:

$$1^\circ. \quad \sigma \geq -\frac{1}{2}. \quad (50)$$

$$2^\circ. \quad -\frac{1}{2} \sqrt{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \sqrt{3}. \quad (51)$$

Die erste Bedingung kann in

$$\frac{1 + 2 \cos 2 \varphi}{\cos 2 \varphi} \geq 0 \quad (52)$$

umschrieben werden, woraus wir

$$\left. \begin{aligned} 0^\circ &\leq \varphi \leq 45^\circ, \\ 60^\circ &\leq \varphi \leq 120^\circ, \\ 135^\circ &\leq \varphi \leq 225^\circ, \\ 240^\circ &\leq \varphi \leq 300^\circ, \\ 315^\circ &\leq \varphi < 360^\circ \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

erhalten.

Die zweite Bedingung kann in

$$-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} 2 \varphi \leq \sqrt{3} \quad (54)$$

umschrieben werden, woraus wir

$$\left. \begin{aligned} 0^\circ &\leq \varphi \leq 30^\circ, \\ 60^\circ &\leq \varphi \leq 120^\circ, \\ 150^\circ &\leq \varphi \leq 210^\circ, \\ 240^\circ &\leq \varphi \leq 300^\circ, \\ 330^\circ &\leq \varphi < 360^\circ \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

erhalten.

Fassen wir nun die zwei Sätze von Bedingungen zusammen, die  $\varphi$  gleichzeitig befriedigen muss, erhalten wir als Bedingung dafür, dass der Schwerpunkt in das Massendreieck fallen soll:

$$\left. \begin{aligned} 0^\circ &\leq \varphi \leq 30^\circ, \\ 60^\circ &\leq \varphi \leq 120^\circ, \\ 150^\circ &\leq \varphi \leq 210^\circ, \\ 240^\circ &\leq \varphi \leq 300^\circ, \\ 330^\circ &\leq \varphi < 360^\circ. \end{aligned} \right\} (56)$$

Abb. 3 zeigt das Gebiet um die Masse  $m_1$ . Die schraffierten Ausschnitte bezeichnen die verbotenen Gebiete. Die für den Librationspunkt erlaubten Gebiete bestehen aus vier Ausschnitten, jeder von  $60^\circ$ , durch vier Ausschnitte — jeder von  $30^\circ$  — von einander getrennt. Das Massendreieck selbst liegt in einem der erlaubten Ausschnitte.

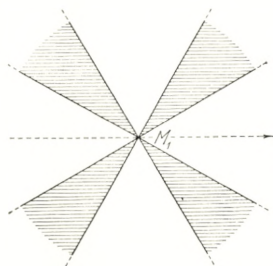


Abb. 3.

In der folgenden Tabelle sind  $\sigma$  und  $\tau$  für spezielle Werte von  $\varphi$  angegeben.

$\varphi$		$\sigma$	$\tau$
$0^\circ$	$180^\circ$	$-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{3} r^3$	0
30	210	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} r^3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
60	240	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
90	270	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{3} r^3$	0
120	300	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
150	330	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} r^3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Es kann nun gezeigt werden, dass einem bestimmten Schwerpunkt in der Nähe einer Seite des Massendreiecks vier Librationspunkte in der Nähe derjenigen Masse entsprechen, die in dem der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt liegt. Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \sqrt{3} \varepsilon^3, \\ \tau &= \tau_0, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

wo  $\varepsilon$  eine positive, unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, während  $\tau_0$  eine endliche Grösse ist.  $\varphi$  kann dann aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -2\tau_0 \quad (58)$$

bestimmt werden, welche die vier Lösungen

$$\varphi = \left. \begin{aligned} \varphi_0 \\ \varphi_0 + 90^\circ \\ \varphi_0 + 180^\circ \\ \varphi_0 + 270^\circ \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

ergibt.

Die entsprechenden Werte von  $r$  finden sich aus der Gleichung

$$r = \sqrt[3]{\frac{\cos 2\varphi}{1 + 2 \cos 2\varphi}} \cdot \varepsilon. \quad (60)$$

Aus (59) und (60) geht jetzt hervor:

Wenn der Schwerpunkt in der Nähe einer Seite des Massendreiecks liegt, werden vier Librationspunkte in der Nähe derjenigen Masse liegen, die sich in dem der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt befindet, und zwar **ein** Librationspunkt in jedem der vier erlaubten Gebiete.

Wird der Koeffizient für  $\varepsilon$  in der Gleichung (60) mit  $k$  bezeichnet, so erhalten wir

$$k = \sqrt[3]{\frac{\cos 2\varphi}{1 + 2 \cos 2\varphi}}. \quad (61)$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $k$  für die  $\varphi$ -Werte von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  angegeben.

$\varphi$	$k$
$0^\circ$	0.6934
5	6922
10	6885
15	6818
20	6713
25	6552
30	6300
35	5878
40	5051
45	0.0000
50	-0.6432
55	-1.0268
60	$\infty$
65	1.311
70	1.129
75	1.058
80	1.022
85	1.005
90	1.000

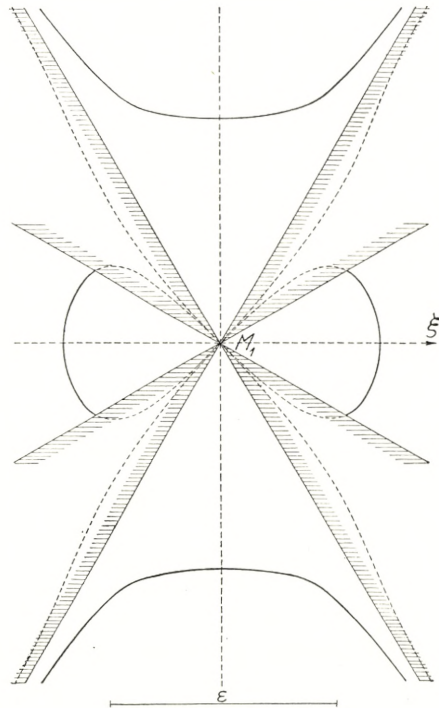


Abb. 4.

Abb. 4 zeigt, wie sich die vier Librationspunkte in den vier Gebieten verschieben, wenn  $\varepsilon$  konstant gehalten wird, während  $\tau_0$  variiert, d. h. wenn der Schwerpunkt parallel der Seite des Massendreiecks verschoben wird.

### 5. Der Librationspunkt in der Nähe eines der Punkte, die mit den Eckpunkten des Massendreiecks in Bezug auf dessen Seiten symmetrisch liegen.

Wenn der Librationspunkt auf eine der Symmetrieachsen des Massendreiecks fällt, so dass er mit den zwei Massen, die nicht auf der Symmetrieachse liegen, ein gleichseitiges Dreieck bildet, wird, wie wir früher gesehen haben, der Schwerpunkt auf die Seite des Dreiecks fallen, die senkrecht zur Symmetrieachse steht.

Von den zwei Lagen, die der Librationspunkt in diesem Falle auf der Symmetrieachse einnehmen kann, wird die eine mit einer der Massen zusammenfallen, während die andere ausserhalb des Massendreiecks fallen wird (Abb. 5). Wir haben schon früher die Lage des Schwerpunktes bestimmt, wenn sich der Librationspunkt in der Nähe eines dieser Punkte ( $M_1$ ) befand, und gehen

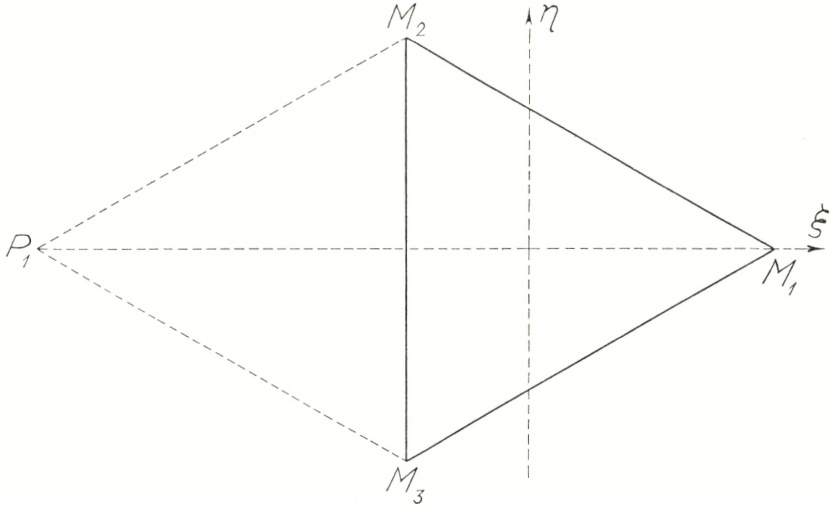


Abb. 5.

nun dazu über, die Lage des Schwerpunktes zu bestimmen, wenn sich der Librationspunkt in der Nähe des anderen Punktes ( $P_1$ ) befindet.

Wir setzen in diesem Fall

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -2 + r \cos \varphi, \\ \eta &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (62)$$

wo  $r$  eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist. Mit diesen Werten für  $\xi$  und  $\eta$  erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1^2 &= 9 - 6 \cos \varphi \cdot r + r^2, \\ \varrho_2^2 &= 3 - (3 \cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) r + r^2, \\ \varrho_3^2 &= 3 - (3 \cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) r + r^2. \end{aligned} \right\} (63)$$

Hieraus finden wir, indem nur Glieder bis zur ersten Ordnung mitgenommen werden:



$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{9} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos \varphi \cdot r \right), \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{6} \sqrt{3} \left( 1 + \left( \frac{5}{6} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \varphi \right) r \right), \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{6} \sqrt{3} \left( 1 + \left( \frac{5}{6} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \varphi \right) r \right), \end{aligned} \right\} (64)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{27} \sin \varphi \cdot r, \\ \beta_2 &= -\frac{1}{6} \left( 1 + \left( \frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{1}{6} \sqrt{3} \sin \varphi \right) r \right), \\ \beta_3 &= \frac{1}{6} \left( 1 + \left( \frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{6} \sqrt{3} \sin \varphi \right) r \right), \end{aligned} \right\} (65)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2 - \frac{2}{9} \sqrt{3} + \left( \frac{5}{6} - \frac{4}{27} \sqrt{3} \right) \cos \varphi \cdot r, \\ B_1 &= -\frac{3}{2} \sin \varphi \cdot r, \\ C_1 &= -1 + \frac{1}{9} \sqrt{3} + \left( \frac{11}{6} + \frac{2}{27} \sqrt{3} \right) \cos \varphi \cdot r, \end{aligned} \right\} (66)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \left( -\frac{1}{6} + \frac{2}{27} \sqrt{3} \right) \sin \varphi \cdot r, \\ B_2 &= -\frac{3}{2} \cos \varphi \cdot r, \\ C_2 &= \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{27} \sqrt{3} \right) \sin \varphi \cdot r. \end{aligned} \right\} (67)$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes werden dann aus den Gleichungen I und II bestimmt. Durch Multiplikation von I mit  $\cos \varphi$  und von II mit  $-\sin \varphi$  und darauffolgende Addition wird  $\tau$  eliminiert, und für  $\sigma$  erhalten wir dann nach Reduktion:

$$\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{9(9 + \sqrt{3})(1 + 2 \cos 2\varphi)}{208 \cos \varphi} r. \tag{68}$$

Setzen wir den Wert für  $\sigma$  in eine der zwei Gleichungen ein, so erhalten wir:

$$\tau = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (69)$$

Wenn der gefundene Schwerpunkt innerhalb des Massendreiecks oder auf dessen Begrenzung fallen soll, müssen folgende zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

$$1^\circ. \quad \sigma \geq -\frac{1}{2}. \quad (70)$$

$$2^\circ. \quad -\frac{1}{2} \sqrt{3} \leq \tau \leq \frac{1}{2} \sqrt{3}. \quad (71)$$

Die erste Bedingung kann in

$$\frac{1 + 2 \cos 2 \varphi}{\cos \varphi} \geq 0 \quad (72)$$

umschrieben werden, woraus sich wieder

$$\left. \begin{aligned} 0^\circ &\leq \varphi \leq 60^\circ, \\ 90^\circ &\leq \varphi \leq 120^\circ, \\ 240^\circ &\leq \varphi \leq 270^\circ, \\ 300^\circ &\leq \varphi < 360^\circ \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

ergibt.

Die zweite Bedingung kann in

$$-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} \varphi \leq \sqrt{3} \quad (74)$$

umschrieben werden, woraus sich

$$\left. \begin{aligned} 0^\circ &\leq \varphi \leq 60^\circ, \\ 120^\circ &\leq \varphi \leq 240^\circ, \\ 300^\circ &\leq \varphi < 360^\circ \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

ergibt.

Fassen wir nun die zwei Sätze von Bedingungen, die  $\varphi$  gleichzeitig befriedigen muss, zusammen, so erhalten wir als Bedin-

gung dafür, dass der Schwerpunkt innerhalb des Massendreiecks fallen soll:

$$\left. \begin{aligned} 0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ, \\ 300^\circ \leq \varphi < 360^\circ. \end{aligned} \right\} (76)$$

Abb. 6 zeigt das Gebiet um  $P_1$ . Der schraffierte Teil bezeichnet das verbotene Gebiet. Das für den Librationspunkt erlaubte Gebiet ist ein Ausschnitt von  $120^\circ$ .

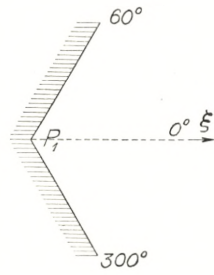


Abb. 6.

Es kann nun gezeigt werden, dass einem bestimmten Schwerpunkt in der Nähe der Seite  $M_2M_3$  im Massendreieck ein Librationspunkt in der Nähe von  $P_1$  entspricht. Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{2} + \frac{9(9 + \sqrt{3})}{208} \varepsilon, \\ \tau &= \tau_0, \end{aligned} \right\} (77)$$

wo  $\varepsilon$  eine positive, unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, während  $\tau_0$  eine endliche Grösse ist.  $\varphi$  kann dann aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = -2 \tau_0 \tag{78}$$

bestimmt werden, die folgende zwei Lösungen ergibt:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 \\ \varphi_0 + 180^\circ. \end{cases} \tag{79}$$

Wegen der Bedingungen, die  $\varphi$  befriedigen muss, kann doch nur der eine Wert von  $\varphi$  angewandt werden.

Den entsprechenden Wert von  $r$  findet man aus der Gleichung

$$r = \frac{\cos \varphi}{1 + 2 \cos 2 \varphi} \varepsilon. \tag{80}$$

Aus dem Vorhergehenden geht jetzt hervor:

Wenn der Schwerpunkt in der Nähe einer Seite des Massendreiecks liegt, wird ein Librationspunkt in der

Nähe des Punktes liegen, der mit dem gegenüberstehenden Eckpunkt der Seite in Bezug auf die betreffende Seite symmetrisch liegt.

Wird der Koeffizient von  $\varepsilon$  in der Gleichung (80) mit  $k$  bezeichnet, erhalten wir:

$$k = \frac{\cos \varphi}{1 + 2 \cos 2 \varphi}. \quad (81)$$

In der Tabelle ist der Wert von  $k$  für  $\varphi$ -Werte von  $0^\circ$  bis  $60^\circ$  angegeben.

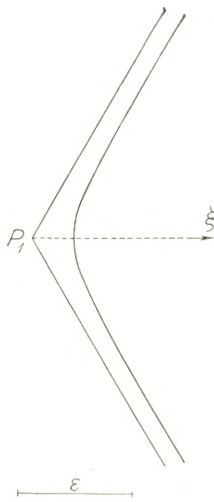


Abb. 7.

$\varphi$	$k$
$0^\circ$	0.3333
5	3355
10	3420
15	3536
20	3711
25	3965
30	4330
35	4864
40	5686
45	7071
50	0.9847
55	1.8154
60	$\infty$

Abb. 7 zeigt, wie sich der Librationspunkt verschiebt, wenn man  $\varepsilon$  konstant hält, während  $\tau_0$  variiert, d. h. wenn der Schwerpunkt parallel der Seite des Massendreiecks verschoben wird.

## 6. Der Librationspunkt in der Nähe eines Librationskreises.

Unter einem Librationskreis wollen wir einen Kreis verstehen, der sein Zentrum in einem der Eckpunkte des Massendreiecks hat und durch die zwei anderen Eckpunkte geht. Abb. 8 zeigt das Massendreieck  $M_1 M_2 M_3$  und die drei Librationskreise  $l_1, l_2$

und  $l_3$ . Die Schnittpunkte zwischen den Librationskreisen sind einerseits die Punkte  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  und andererseits die im Vorhergehenden erwähnten Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ . Auf jedem einzelnen der drei Librationskreise liegen vier der erwähnten sechs Punkte, so auf  $l_1$  die Punkte  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $P_2$  und  $P_3$ . Wir haben im Vorhergehenden (II, 4; II, 5) den Fall näher untersucht, wo der Librationspunkt in der Nähe dieser Punkte liegt, und wir gehen

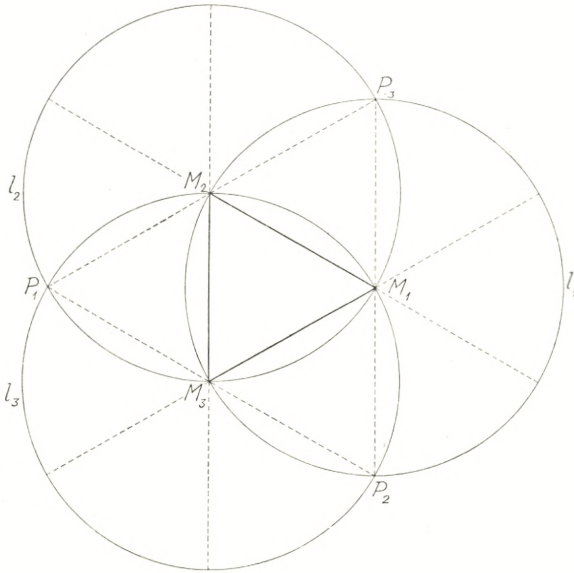


Abb. 8.

nun dazu über, den allgemeineren Fall zu studieren, wo der Librationspunkt in der Nähe eines Librationskreises liegt, entweder etwas ausserhalb oder etwas innerhalb des Kreises.

Wenn der Librationspunkt sich in der Nähe des Librationskreises  $l_1$  befindet, können wir, da der Radius des Kreises  $\sqrt{3}$  ist,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 + (\sqrt{3} + \epsilon) \cos \varphi, \\ \eta &= (\sqrt{3} + \epsilon) \sin \varphi \end{aligned} \right\} (82)$$

setzen, wo die unendlich kleine Grösse  $\epsilon$  die Distanz zwischen dem Librationspunkt und dem Librationskreis bezeichnet. Mit diesen Werten für  $\xi$  und  $\eta$  erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \sqrt{3} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} \varepsilon \right), \\ \varrho_2^2 &= \left( 6 + 3\sqrt{3} \cos \varphi - 3 \sin \varphi \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} \varepsilon \right) + \varepsilon^2, \\ \varrho_3^2 &= \left( 6 + 3\sqrt{3} \cos \varphi + 3 \sin \varphi \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} \varepsilon \right) + \varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Die Grössen  $6 + 3\sqrt{3} \cos \varphi - 3 \sin \varphi$  und  $6 + 3\sqrt{3} \cos \varphi + 3 \sin \varphi$ , die von 0 bis 12 variieren können, wollen wir mit  $f_2^2$  und  $f_3^2$  bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} f_2^2 &= 6 + 3\sqrt{3} \cos \varphi - 3 \sin \varphi = 6 [1 + \cos(\varphi + 30^\circ)], \\ f_3^2 &= 6 + 3\sqrt{3} \cos \varphi + 3 \sin \varphi = 6 [1 + \cos(\varphi - 30^\circ)]. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Indem nur Glieder erster Ordnung in den Reihenentwicklungen mitgenommen werden, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \sqrt{3} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} \varepsilon \right), \\ \varrho_2 &= f_2 \left( 1 + \frac{1}{6} \sqrt{3} \varepsilon \right), \\ \varrho_3 &= f_3 \left( 1 + \frac{1}{6} \sqrt{3} \varepsilon \right), \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{3} \cos \varphi - \frac{2}{9} \sqrt{3} \cos \varphi \cdot \varepsilon, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{f_2^3} \left[ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \cos \varphi - \left( \frac{3}{4} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \varepsilon \right], \\ \alpha_3 &= \frac{1}{f_3^3} \left[ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \cos \varphi - \left( \frac{3}{4} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \varepsilon \right], \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{3} \sin \varphi - \frac{2}{9} \sqrt{3} \sin \varphi \cdot \varepsilon, \\ \beta_2 &= \frac{1}{f_2^3} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{3} + \sqrt{3} \sin \varphi + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \varepsilon \right], \\ \beta_3 &= \frac{1}{f_3^3} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{3} + \sqrt{3} \sin \varphi - \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \varepsilon \right], \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi - \frac{4}{3} \cos \varphi \cdot \varepsilon \\
 &\quad - \left[ \frac{3}{2} \sqrt{3} + 3 \cos \varphi - \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \varphi \right) \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3} \right], \\
 B_1 &= \left[ \frac{9}{2} + 3 \sqrt{3} \cos \varphi - \left( \frac{9}{4} \sqrt{3} + \frac{3}{2} \cos \varphi \right) \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3} \right], \\
 C_1 &= 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi + \frac{5}{3} \cos \varphi \cdot \varepsilon \\
 &\quad - \left[ \frac{3}{2} \sqrt{3} + 3 \cos \varphi - \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \varphi \right) \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3} \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_2 &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin \varphi - \frac{4}{3} \sin \varphi \cdot \varepsilon + \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{3} \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3} \right] \\
 &\quad - \left[ 3 \sin \varphi - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \varphi \cdot \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3} \right], \\
 B_2 &= 1 + \left[ -\frac{3}{2} \sqrt{3} + \frac{9}{4} \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3} \right] \\
 &\quad + \left[ 3 \sqrt{3} \sin \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi \cdot \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3} \right], \\
 C_2 &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin \varphi + \frac{5}{3} \sin \varphi \cdot \varepsilon + \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{3} \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3} \right] \\
 &\quad - \left[ 3 \sin \varphi - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \varphi \cdot \varepsilon \right] \cdot \left[ \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Der Kürze wegen führen wir die Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned}
 g_1 &= \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3}, \\
 g_2 &= \frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3}
 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

ein; ferner setzen wir

$$\sigma = 1 + \delta, \quad (91)$$

wo  $\delta$  eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist. Gleichung I und II können dann nach Reduktion auf folgende einfache Form gebracht werden:

$$\left. \begin{aligned} \left[ 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi \right] \cdot \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \sqrt{3} g_1 \right) \delta + \frac{9}{2} g_2 \tau \right] &= 3 \cos \varphi \cdot \varepsilon, \\ \left[ \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin \varphi \left( 1 - \frac{3}{2} \sqrt{3} g_1 \right) + \frac{3}{2} g_2 \right] \delta \\ + \left[ 1 - \frac{3}{2} \sqrt{3} g_1 + 3 \sqrt{3} \sin \varphi \cdot g_2 \right] \tau &= 3 \sin \varphi \cdot \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Da  $g_1$  nur im Ausdruck  $1 - \frac{3}{2} \sqrt{3} g_1$  auftritt, wollen wir

$$g_3 = 1 - \frac{3}{2} \sqrt{3} g_1 \quad (93)$$

setzen, wonach die Gleichungen I und II folgende Form erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \left[ 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi \right] \cdot \left[ g_3 \delta + \frac{9}{2} g_2 \tau \right] &= 3 \cos \varphi \cdot \varepsilon, \\ \left[ \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin \varphi \cdot g_3 + \frac{3}{2} g_2 \right] \delta + \left[ g_3 + 3 \sqrt{3} \sin \varphi \cdot g_2 \right] \tau &= 3 \sin \varphi \cdot \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Die Determinante des Systems wird

$$D = \left[ 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi \right] \cdot \left[ g_3^2 - \frac{27}{4} g_2^2 \right]. \quad (95)$$

Diese Determinante wird Null, wenn

$$1^\circ. \quad 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi = 0, \quad (96)$$

$$2^\circ. \quad g_3^2 - \frac{27}{4} g_2^2 = 0. \quad (97)$$



Aus (96) erhalten wir

$$\varphi = \begin{cases} 150^\circ \\ 210^\circ. \end{cases} \quad (98)$$

Die zwei gefundenen Werte von  $\varphi$  entsprechen den Punkten  $M_2$  und  $M_3$  auf dem Librationskreis  $l_1$ .

Aus (97) erhalten wir

$$\left. \begin{matrix} f_2 \\ f_3 \end{matrix} \right\} = \sqrt{3}. \quad (99)$$

Da  $f_2$  und  $f_3$  die Distanzen des Librationspunktes von  $M_2$  bzw.  $M_3$  bezeichnen, wenn  $\varepsilon = 0$  ist, wird  $f_2 = \sqrt{3}$  den Punkten  $M_3$  und  $P_3$  auf dem Librationskreis  $l_1$  entsprechen, während  $f_3 = \sqrt{3}$  den Punkten  $M_2$  und  $P_2$  entspricht.

Hieraus geht hervor, dass die Determinante der Gleichungen für die Punkte  $M_2, M_3, P_2$  und  $P_3$  auf dem Librationskreis  $l_1$  Null wird. Diese vier Punkte sind gerade die Schnittpunkte zwischen dem Librationskreis  $l_1$  und den zwei anderen Librationskreisen. Für andere Punkte auf diesem Kreis ist die Determinante von Null verschieden, und das Gleichungssystem kann dann zur Bestimmung der Koordinaten des Schwerpunktes dienen. Man findet:

$$\left. \begin{aligned} D\delta &= \left[ 3 \cos \varphi \cdot g_3 - \frac{27}{2} \sin \varphi \cdot g_2 \right] \varepsilon, \\ D\tau &= \left[ 3 \sin \varphi \cdot g_3 - \frac{9}{2} \cos \varphi \cdot g_2 \right] \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Wir stellen zum Schluss die Formeln zur Berechnung von  $\sigma$  und  $\tau$  in der Reihenfolge zusammen, in der sie angewandt werden sollen.

$$f_2^2 = 6[1 + \cos(\varphi + 30^\circ)],$$

$$f_3^2 = 6[1 + \cos(\varphi - 30^\circ)],$$

$$g_1 = \frac{1}{f_2^3} + \frac{1}{f_3^3},$$

$$g_2 = \frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3},$$

$$g_3 = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}g_1,$$

$$h_1 = 3 \cos \varphi \cdot g_3 - \frac{27}{2} \sin \varphi \cdot g_2,$$

$$h_2 = 3 \sin \varphi \cdot g_3 - \frac{9}{2} \cos \varphi \cdot g_2,$$

$$D = \left[1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cos \varphi\right] \cdot \left[g_3^2 - \frac{27}{4}g_2^2\right],$$

$$k_1 = \frac{h_1}{D},$$

$$k_2 = \frac{h_2}{D},$$

$$\underline{\sigma = 1 + k_1 \varepsilon}, \quad \underline{\tau = k_2 \varepsilon}.$$

Zur numerischen Berechnung sind jedoch folgende Formeln geeigneter:

$$a = \left| \operatorname{cosec}^3 \left( 75^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right|,$$

$$b = \left| \operatorname{cosec}^3 \left( 105^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right|,$$

$$h_1 = 3 \left[ \cos \varphi - \left( \frac{a}{8} \sin (30^\circ + \varphi) + \frac{b}{8} \sin (30^\circ - \varphi) \right) \right],$$

$$h_2 = 3 \left[ \sin \varphi - \frac{1}{3} \sqrt{3} \left( \frac{a}{8} \sin (30^\circ + \varphi) - \frac{b}{8} \sin (30^\circ - \varphi) \right) \right],$$

$$D = \left[ 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos \varphi \right] \cdot \left[ \frac{a}{8} - 1 \right] \cdot \left[ \frac{b}{8} - 1 \right].$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $k_1$  und  $k_2$  für die  $\varphi$ -Werte von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  angegeben.

$\varphi$	$k_1$	$k_2$
$0^\circ$	+1.616	+0.000
10	1.603	0.273
20	1.562	0.555
30	1.485	0.857
40	1.355	1.195
50	1.135	1.597
60	+0.737	2.124
70	-0.118	2.947
80	-2.849	+4.903
90	—	—
100	+9.096	-0.955
110	6.713	+1.222
120	6.633	2.510
130	8.021	4.052
140	+13.497	+7.642
150	—	—
160	-9.479	-5.307
170	4.136	1.678
180	-3.123	-0.000

Abb. 9 zeigt, wie sich der Schwerpunkt im Verhältnis zu  $M_1$  verschiebt, wenn  $\varepsilon$  eine positive Konstante ist, während  $\varphi$  variiert, d. h. wenn der Librationspunkt auf der äusseren Seite des

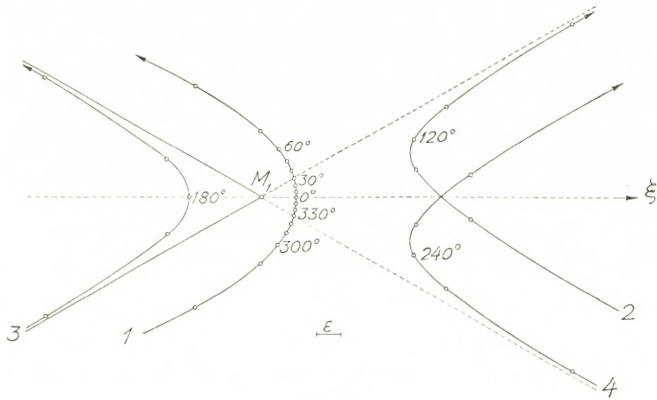


Abb. 9.

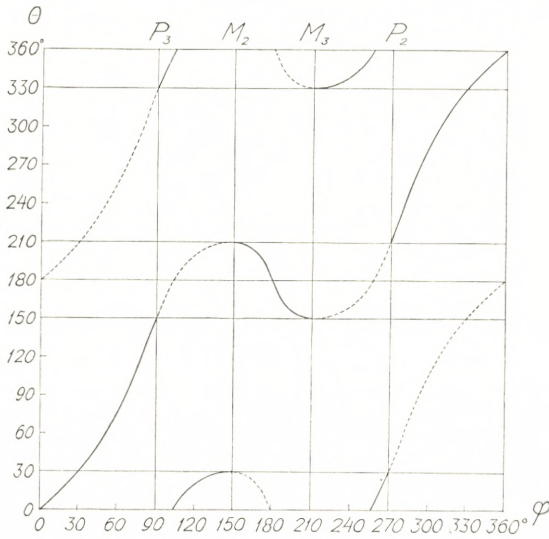


Abb. 10.

Librationskreises, in konstanter Entfernung von diesem, verschoben wird. Wenn  $\varepsilon$  aber eine negative Konstante ist, so dass der Librationspunkt auf der inneren Seite des Kreises verschoben wird, so wird die Kurve der Verschiebung des Schwerpunktes

zu der in der Abbildung gezeigten Kurve mit  $M_1$  als Symmetriezentrum symmetrisch liegen.

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 1 + k_1 \varepsilon = 1 + q \cos \theta, \\ \tau &= k_2 \varepsilon = q \sin \theta, \end{aligned} \right\} (101)$$

so ist  $\theta$  damit als Funktion von  $\varphi$  definiert. Abb. 10 zeigt das Abhängigkeitsverhältnis zwischen  $\theta$  und  $\varphi$ . Die voll ausgezogenen Teile der Kurven entsprechen positiven Werten von  $\varepsilon$  (der Librationspunkt ausserhalb des Librationskreises), die gestrichelten Teile entsprechen negativen Werten von  $\varepsilon$  (der Librationspunkt innerhalb des Librationskreises). Es geht aus der Abbildung hervor, dass einem bestimmten Wert von  $\varphi$  zwei Werte von  $\theta$  ( $\theta_0$  und  $\theta_0 + 180^\circ$ ) bzw. auf einem voll ausgezogenen oder einem gestrichelten Kurventeil entsprechen, der Tatsache gemäss, dass der Librationspunkt für einen bestimmten Wert von  $\varphi$  entweder ausserhalb oder innerhalb des Librationskreises liegen kann.

Einem bestimmten Wert von  $\theta$  entsprechen entweder zwei oder vier Werte von  $\varphi$ , wie aus der folgenden Übersicht hervorgeht.

$\theta$	Anzahl von Librationspunkten		
	Ausserhalb des Librationskreises	Innerhalb des Librationskreises	Insgesamt
$0^\circ - 30^\circ$	3	1	4
$30^\circ - 150^\circ$	1	1	2
$150^\circ - 210^\circ$	1	3	4
$210^\circ - 330^\circ$	1	1	2
$330^\circ - 360^\circ$	3	1	4

Wenn man nur mit positiven Massen rechnet, muss der Schwerpunkt im Massendreieck liegen, so dass  $150^\circ < \theta < 210^\circ$ . Aus dieser Übersicht ersieht man, dass dann vier Librationspunkte in der Nähe des Librationskreises liegen.

Es sei bemerkt, dass in der Übersicht eventuelle Librationspunkte in der Nähe der kritischen Punkte  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $P_2$  und  $P_3$  nicht berücksichtigt sind. In der Tat liegen, wie aus den nu-

merischen Berechnungen in Abschnitt III hervorgehen wird, im ganzen acht Librationspunkte in der Nähe des Librationskreises; ausser den oben genannten vier Librationspunkten liegen zwei Librationspunkte in der Nähe von  $M_2$  und zwei in der Nähe von  $M_3$ .

### 7. Die Gebiete der Librationspunkte.

Mit Hilfe der vorhergehenden theoretischen Untersuchung ist es jetzt möglich, zu entscheiden, in welchen Gebieten der Ebene der Librationspunkt liegen kann, wenn dem Librationspunkt positive Massen entsprechen sollen, d. h. wenn der Schwerpunkt innerhalb des Massendreiecks fallen soll. Die Begrenzung der erwähnten Gebiete wird man dadurch finden können, dass man den Schwerpunkt den Umkreis des Massendreiecks durchlaufen lässt und die Kurven bestimmt, die die entsprechenden Librationspunkte dabei durchlaufen.

So lange sich der Schwerpunkt auf einer Seite des Massendreiecks befindet, ohne in einem der Eckpunkte zu liegen, haben wir einen Spezialfall des Dreikörperproblems (problème restreint). In diesem Spezialfall gibt es fünf Librationspunkte, nämlich:

- $L_1$  auf der Linie, die die zwei endlichen Massen verbindet, und zwar zwischen diesen zwei Massen liegend,
- $L_2$  und  $L_3$  auf der Linie, die die zwei endlichen Massen verbindet, jeder auf einer der Verlängerungen der Linie über die Massen hinaus liegend,
- $L_4$  und  $L_5$  in den zwei Punkten, die mit den zwei Massen Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke bilden.

Abb. 11 zeigt die Verschiebungen der Librationspunkte, wenn der Schwerpunkt den Seiten des Massendreiecks entlang verschoben wird, jedoch von den Eckpunkten des Massendreiecks abgesehen. Die Pfeile geben die Bewegungsrichtungen der Librationspunkte an, wenn wir uns denken, dass der Schwerpunkt in der positiven Umdrehungsrichtung um das Massendreieck verschoben wird. Die Pfeile auf den Seiten des Massendreiecks geben die Bewegungsrichtung des Librationspunktes  $L_1$  an, während die Pfeile auf den Verlängerungen der Seiten die Bewegungsrichtungen der Librationspunkte  $L_2$  und  $L_3$  angeben. Für

die Librationspunkte  $L_4$  und  $L_5$  wechselt die Lage zwischen den sechs Punkten  $M_1, P_1, M_2, P_2, M_3$  und  $P_3$ .

Es geht nun aus der Abbildung klar hervor, dass — von dem Gebiet abgesehen, das von den Seiten des Massendreiecks begrenzt wird — keine bestimmten Gebiete der Ebene durch die gegebenen Linienstücke und Punkte begrenzt sind. Wir haben aber auch bis jetzt vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt sich nicht gerade in den Eckpunkten

des Massendreiecks befand; sollte dies der Fall sein, werden zwei der Massen Null sein, und das Problem ist jetzt auf ein Zweikörperproblem reduziert. Es existiert dann keine endliche Anzahl von Librationspunkten mehr; für die gegebene Winkelgeschwindigkeit, womit das Koordinatensystem rotiert, haben die Librationspunkte als geometrischen Ort einen Kreis mit dem Zentrum in der endlichen Masse und mit dem Radius  $\sqrt{3}$ . Es werden somit insgesamt drei Kreise (die Librationskreise  $l_1, l_2$  und  $l_3$ ) zu berücksichtigen sein. Es sind indessen nur Teile der Peripherie der Librationskreise, die die gesuchten Gebiete begrenzen. Denken wir uns, dass der Schwerpunkt nicht den Umkreis des Massendreiecks selbst durchläuft, sich aber längs der inneren Seite des Umkreises bewegt, so wird der Schwerpunkt, indem er in positiver Umdrehungsrichtung  $M_1$  passiert, im Verhältnis zu  $M_1$  Positionswinkel  $\theta$  durchlaufen, die von  $210^\circ$  bis  $150^\circ$  variieren. Die entsprechenden Werte des Positionswinkels  $\varphi$  des Librationspunktes gehen aus Abb. 10 hervor; aus dieser Abbildung geht auch hervor, ob sich der Librationspunkt längs der äusseren oder der inneren Seite des Librationskreises bewegt. Vom Librationskreis  $l_1$  werden folgende vier Bogen Grenzkurven:

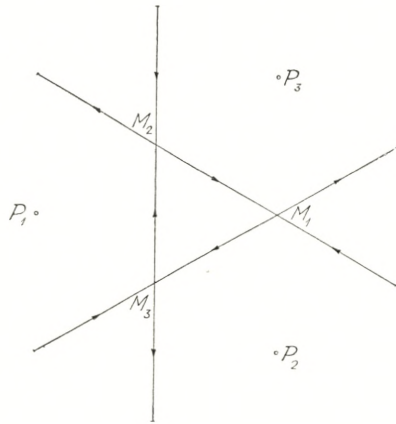


Abb. 11.

—  $30^\circ < \varphi < 30^\circ$  (Innere Seite),  $150^\circ < \varphi < 210^\circ$  (Äussere Seite),  
 $90^\circ < \varphi < 150^\circ$  (Innere Seite),  $210^\circ < \varphi < 270^\circ$  (Innere Seite).

Für die Librationskreise  $l_2$  und  $l_3$  gelten entsprechende Verhältnisse.

Abb. 12 zeigt, wie die 9 geradlinigen Stücke auf den Seiten des Massendreiecks und auf den Verlängerungen der Seiten in

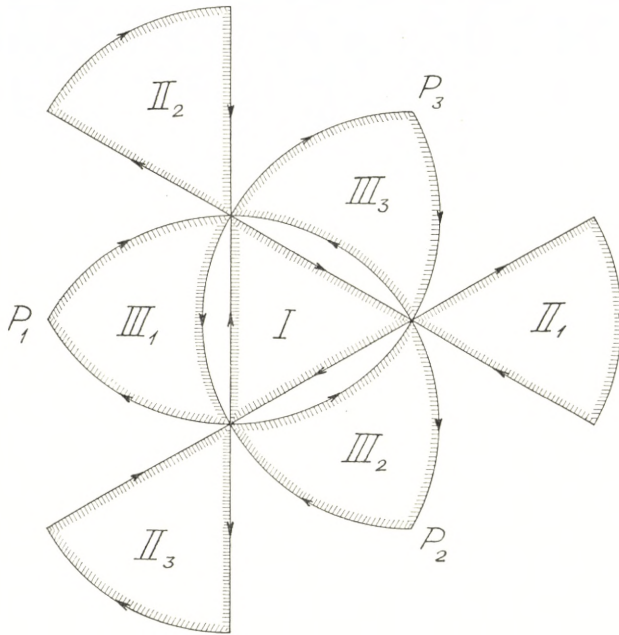


Abb. 12.

Verbindung mit den 12 Bogen auf den 3 Librationskreisen im ganzen 7 Gebiete der Ebene begrenzen, nämlich:

- 1 Gebiet von den Seiten des Massendreiecks begrenzt (I),
- 3 Gebiete von zwei Verlängerungsstücken und einem Kreisbogen begrenzt (II),
- 3 Gebiete von drei Kreisbogen begrenzt (III).

Die auf den Begrenzungsstücken angebrachten Pfeile geben diejenige Umlaufrichtung auf der Gebietsbegrenzung an, die der positiven Umlaufrichtung des Schwerpunktes in der Bewegung längs der Begrenzung des Massendreiecks entspricht. Man sieht, dass die Bewegung des Librationspunktes für alle 7 Gebiete in einer der Umlaufrichtung des Schwerpunktes entgegengesetzten Richtung erfolgt.



### III. Numerische Berechnungen.

#### 1. Der Librationspunkt auf einer Symmetrieachse.

Im Abschnitt II, 1 haben wir den Spezialfall behandelt, wo der Librationspunkt auf eine der Symmetrieachsen des Massendreiecks fällt. Der Schwerpunkt wird dann im allgemeinen auch auf die betreffende Symmetrieachse fallen. Für die Symmetrieachse, die mit der  $\xi$ -Achse zusammenfällt, haben wir früher gefunden, dass die Abszisse  $\sigma$  des Schwerpunktes durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{\xi - \sqrt{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)}{1 + 2\sqrt{3}(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{1}$$

bestimmt werden kann, wo

$$\alpha_1 = \frac{\xi - 1}{\varrho_1^3}, \quad \alpha_2 = \frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varrho_2^3}, \tag{2}$$

$$\varrho_1^2 = (\xi - 1)^2, \quad \varrho_2^2 = 1 + \xi + \xi^2. \tag{3}$$

Wenn man nun  $\xi$  bestimmte Werte gibt, können die entsprechenden Werte von  $\sigma$  berechnet werden. In der folgenden Tabelle I ist  $\sigma$  für  $\xi$ -Werte von  $-2.0$  bis  $2.7$  angegeben. Für  $\xi < -2$

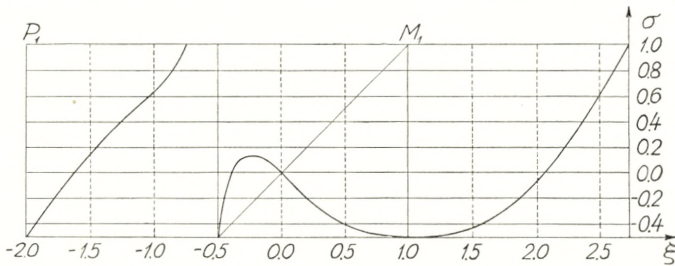


Abb. 13.

und  $\xi > 1 + \sqrt{3}$  fällt der Schwerpunkt ausserhalb des Massendreiecks, und es ist deshalb bei der Rechnung nicht notwendig gewesen, diese Werte von  $\xi$  zu berücksichtigen; auch für ein kleines Gebiet innerhalb des Intervalls  $-2 < \xi < 1 + \sqrt{3}$  fällt der Schwerpunkt ausserhalb des Massendreiecks, des Zusammenhangs wegen sind jedoch diese Werte in der Tabelle mitgenommen.

Eine gute Übersicht darüber, wie sich die Librationspunkte verschieben, wenn der Schwerpunkt die  $\xi$ -Achse durchläuft, er-

Tabelle I.

$\xi$	$\sigma$	$\xi$	$\sigma$
-2.0	-0.5000	+0.1	-0.0912
1.9	0.3623	0.2	0.1864
1.8	0.2285	0.3	0.2762
1.7	-0.0994	0.4	0.3533
1.6	+0.0239	0.5	0.4133
1.5	0.1408	0.6	0.4554
1.4	0.2506	0.7	0.4813
1.3	0.3528	0.8	0.4946
1.2	0.4479	0.9	0.4993
1.1	0.5373	1.0	0.5000
1.0	0.6244	1.1	0.4994
0.9	0.7186	1.2	0.4951
0.8	0.8468	1.3	0.4838
0.7	1.1243	1.4	0.4628
0.6	+3.5331	1.5	0.4298
0.5	-0.5000	1.6	0.3831
0.4	+0.0303	1.7	0.3218
0.3	0.1286	1.8	0.2456
0.2	0.1259	1.9	0.1547
-0.1	+0.0765	2.0	-0.0500
0.0	0.0000	2.1	+0.0674
		2.2	0.1959
		2.3	0.3340
		2.4	0.4798
		2.5	0.6318
		2.6	0.7884
		+2.7	+0.9483

halten wir durch Betrachtung der Abb. 13. Die waagerechten Linien stellen die Symmetrieachse für verschiedene Werte von  $\sigma$  dar, die schräge Gerade markiert die Lage des Schwerpunktes auf der Symmetrieachse, und endlich bezeichnen die Schnittpunkte zwischen den waagerechten Linien und der Kurve die Lage der Librationspunkte auf der Symmetrieachse.

Für  $\sigma = 0$  gibt es vier Schnittpunkte zwischen der Achse und der Kurve; diese vier Schnittpunkte entsprechen gerade den LINDOWSchen Librationspunkten  $L_0, L_2, L_4$  und  $L_6$ . Wenn jetzt der Schwerpunkt auf der Abbildung nach rechts und die Achse gleichzeitig nach oben rückt, so geht aus der Abbildung deutlich her-

Tabelle II.

No.	$\xi$	$\sigma$
1	-2	-0.5
2	-1.619790	0
3	-0.732051	+1
4	-0.5	-0.5
5	-0.413888	0
6	-0.257	+0.135171
7	0	0
8	+1	-0.5
9	+2.043817	0
10	+2.732051	+1

- No. 1. Der Librationspunkt  $L_4$  im problème restreint.
- No. 2. Der LINDOWSche Librationspunkt  $L_6$ .
- No. 3. Der Librationspunkt auf dem Librationskreis  $l_1$  ( $\xi = 1 - \sqrt{3}$ ).
- No. 4. Der Librationspunkt  $L_1$  im problème restreint.
- No. 5. Der LINDOWSche Librationspunkt  $L_4$ .
- No. 6. Der Zusammenschmelzungspunkt für  $L_0$  und  $L_4$ .
- No. 7. Der LINDOWSche Librationspunkt  $L_0$ .
- No. 8. Der Librationspunkt  $L_5$  im problème restreint.
- No. 9. Der LINDOWSche Librationspunkt  $L_2$ .
- No. 10. Der Librationspunkt auf dem Librationskreis  $l_1$  ( $\xi = 1 + \sqrt{3}$ ).

vor, dass sich  $L_0$  und  $L_4$  einander nähern werden, während  $L_2$  sich vom Mittelpunkt entfernen und  $L_6$  sich dem Mittelpunkt nähern wird. Für einen bestimmten Wert von  $\sigma$  ( $\sigma = 0.135171$ ) schmelzen  $L_0$  und  $L_4$  zusammen ( $\xi = -0.257$ ), und für grössere Werte von  $\sigma$  liegen auf der Achse nur die zwei Librationspunkte  $L_2$  und  $L_6$ . Für  $\sigma = 1$  hat man für  $L_2: \xi = 1 + \sqrt{3}$  und für  $L_6: \xi = 1 - \sqrt{3}$ . Wenn dagegen der Schwerpunkt vom Mittelpunkt nach links und die Achse gleichzeitig nach unten rückt, werden stets vier Schnittpunkte zwischen der Achse und der Kurve, also vier Librationspunkte vorhanden sein. Während  $\sigma$  sich  $-0.5$  nähert, werden  $L_0$  und  $L_2$  sich einander nähern, um schliesslich im Punkt  $\xi = 1$  ( $M_1$ ) zusammenzuschmelzen; gleichzeitig wird sich  $L_4$  dem Schwerpunkt nähern und mit diesem im Punkt  $\xi = -0.5$  zusammenschmelzen, während die Bewegung von  $L_6$  im Punkt  $\xi = -2$  ( $P_1$ ) enden wird.

In der Tabelle II sind  $\xi$  und  $\sigma$  für gewisse Spezialfälle angegeben. Wenn die Zahlenwerte irrational sind, sind sie mit 6 De-

zimalen angegeben; doch ist im Falle No. 6  $\xi$  nur mit 3 Dezimalen angegeben, weil eine Angabe von  $\sigma$  mit 6 Dezimalen in diesem Falle nur einer Angabe von  $\xi$  mit 3 Dezimalen entspricht.

## 2. Der Librationspunkt auf einer Verbindungslinie zwischen zwei Massen.

Ebenso wie bei der theoretischen Behandlung dieses Falles (II, 2), denken wir uns auch hier, dass der Librationspunkt auf die Linie  $M_2 M_3$  (die Verbindungslinie zwischen den Massen  $m_2$  und  $m_3$ ) fällt. Wenn wir von den zwei Spezialfällen, wo der Librationspunkt in  $M_2$  und  $M_3$  fällt, absehen, so wird der entsprechende Schwerpunkt auch auf diese Linie fallen, und seine Ordinate  $\tau$  wird durch die Gleichungen

$$\tau = \frac{16\eta^5 - 24\eta^3 + 153\eta}{16\eta^4 - 120\eta^2 - 63}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \eta < \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (4)$$

$$\tau = \eta - \frac{27\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\left(\eta^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 18\eta}, \quad \eta > \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (5)$$

$$\tau = \eta + \frac{27\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\left(\eta^2 - \frac{3}{4}\right)^2 - 18\eta}, \quad \eta < -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (6)$$

bestimmt sein.

In der Tabelle III ist  $\tau$  für  $\eta$ -Werte von 0 bis 2.6 angegeben. Aus den Gleichungen für  $\tau$  ersieht man, dass, wenn  $\eta$  gegen  $-\eta$  vertauscht wird,  $\tau$  durch  $-\tau$  ersetzt werden wird; die Tabelle gibt deshalb gleichzeitig  $\tau$  für  $\eta$ -Werte von 0 bis  $-2.6$ .

Abb. 14 zeigt, wie die Librationspunkte verschoben werden, wenn sich der Schwerpunkt auf der Linie  $M_2 M_3$  bewegt. Die senkrechten Linien der Abbildung zeigen die Linie  $M_2 M_3$  für verschiedene Werte von  $\tau$ ; die schräge Gerade markiert die Lage des Schwerpunktes auf dieser Linie, während die Schnittpunkte zwischen den senkrechten Linien und der Kurve die Librationspunkte bezeichnen.

Tabelle III.

$\eta$	$\tau$	$\eta$	$\tau$
0.00	-0.0000	0.9	-0.8660
0.05	0.1208	1.0	0.8638
0.10	0.2380	1.1	0.8547
0.15	0.3481	1.2	0.8349
0.20	0.4487	1.3	0.8010
0.25	0.5379	1.4	0.7514
0.30	0.6148	1.5	0.6847
0.35	0.6791	1.6	0.6008
0.40	0.7315	1.7	0.5002
0.45	0.7728	1.8	0.3844
0.50	0.8043	1.9	0.2547
0.55	0.8275	2.0	-0.1135
0.60	0.8438	2.1	+0.0374
0.65	0.8545	2.2	0.1959
0.70	0.8610	2.3	0.3600
0.75	0.8644	2.4	0.5278
0.80	-0.8657	2.5	0.6981
		2.6	+0.8694

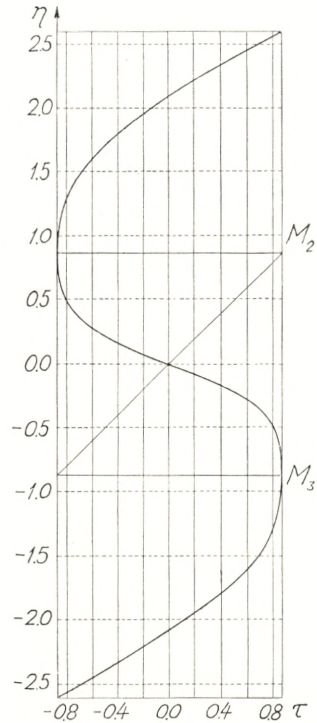


Abb. 14.

Man sieht aus der Abbildung, dass immer drei Schnittpunkte zwischen der Kurve und einer der senkrechten Linien existieren. Es werden deshalb immer drei Librationspunkte auf der Linie  $M_2M_3$  liegen. Der Librationspunkt, der zwischen  $M_2$  und  $M_3$  liegt, entspricht dem Librationspunkt  $L_1$  im problème restreint, während die zwei anderen Librationspunkte den Librationspunkten  $L_2$  und  $L_3$  im problème restreint entsprechen.

### 3. Der Librationspunkt innerhalb des Massendreiecks (Gebiet I).

Den allgemeinen Fall, wo der Librationspunkt innerhalb der Seiten des Massendreiecks liegt, wollen wir jetzt einer genaueren numerischen Untersuchung unterziehen. Wenn nach und nach der Librationspunkt in einer grossen Anzahl von Punkten innerhalb des Massendreiecks angebracht wird und die entsprechenden Schwerpunkte bestimmt werden, wird man eine gute Übersicht darüber erhalten können, wie der Schwerpunkt verschoben wird, wenn der Librationspunkt sich bewegt.

Von grosser Bedeutung für die Durchführung dieser Rechenarbeit ist es, die Verschiebung des Librationspunktes auf eine bequeme Weise zu wählen. Man könnte daran denken, mit dem Librationspunkt im Mittelpunkt des Massendreiecks zu beginnen, um ihn nachher in gleich langen Schritten auf Linien durch den Startpunkt zu verschieben. Es ist jedoch ein Nachteil bei dieser Methode, dass die Punkte am dichtesten um den Mittelpunkt liegen werden, ebenso wie die Methode keine gebührende Rücksicht auf die fundamentale Rolle nimmt, welche die Dreiecksseiten im Problem spielen. Das Verfahren ist identisch mit der Methode, nach der der Librationspunkt auf Kreisen mit dem Zentrum im Mittelpunkt des Dreiecks verschoben wird.

Die soeben skizzierte Methode wurde im Anfang der Berechnung angewandt, und eine grosse Arbeit wurde ausgeführt, ehe es klar wurde, dass die Methode unbefriedigend war. Die Rechenarbeit wurde deshalb auf einer ganz neuen Grundlage wieder aufgenommen und nach einer Methode, welche die Bedeutung der Dreiecksseiten berücksichtigt. Der Librationspunkt wird auch bei dieser Methode um den Mittelpunkt verschoben; statt in Kreisen verschoben zu werden, wird er aber jetzt auf den Seiten gleichseitiger Dreiecke verschoben, deren Seiten mit den Seiten des Massendreiecks parallel sind, und deren Mittelpunkte in den Mittelpunkt des Massendreiecks fallen. Dadurch entsteht die enge Beziehung zu den Seiten des Massendreiecks.

Wegen der Symmetrie in Bezug auf die drei Symmetrieachsen des Massendreiecks ist es bei der Berechnung nicht notwendig, den Librationspunkt auf dem ganzen Umkreis der erwähnten Dreiecke zu verschieben. Es genügt, den Librationspunkt auf  $\frac{1}{6}$  des Umkreises zu verschieben, z. B. vom Seitenmittelpunkt bis zum Eckpunkt, indem wir die Schwerpunkte, die den übrigen Librationspunkten entsprechen, mit Hilfe der Symmetrie in Bezug auf die drei Symmetrieachsen finden können. Dieses Verhältnis kann auch so ausgedrückt werden, dass es genügt, den Librationspunkt innerhalb eines der sechs kongruenten Dreiecke, worin das Massendreieck durch die drei Symmetrieachsen geteilt wird, zu verschieben.

Abb. 15 zeigt die Lage der Librationspunkte, die bei der Berechnung benutzt sind. Die sechs kongruenten Dreiecke, in die das Massendreieck geteilt ist, sind mit den Zahlen 1-6 numeriert.

Die gewählten Librationspunkte befinden sich alle im Dreieck 3. Wie aus der Abbildung hervorgeht, sind die Librationspunkte auf den Dreiecksseiten in Schritten von der Grösse 0.05 verschoben worden, ebenso wie die Distanz zwischen den Dreiecksseiten 0.05 ist; jedoch ist zwischen der Dreiecksseite  $\xi = -0.45$  und der Seite  $\xi = -0.50$  des Massendreiecks eine besondere Dreiecksseite  $\xi = -0.48$  eingeschoben, indem es sich, als die Berechnung vorwärtsschritt, zeigte, dass in dem erwähnten Gebiet eine ganz geringe Verschiebung des Librationspunktes senkrecht auf die Dreiecksseite eine grosse Verschiebung des Schwerpunktes zur Folge haben wird. Die in der Abbildung angegebenen 84 Librationspunkte sind über die verschiedenen Abszissen so verteilt, wie die folgende Übersicht zeigt.

$\xi$	Anzahl
-0.05	1
10	3
15	4
20	6
25	8
30	9
35	11
40	13
45	14
-0.48	15
Summe	84

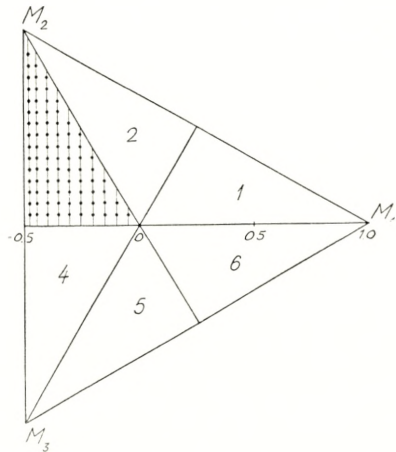


Abb. 15.

Nach Vollendung der Berechnung wurden dann unter Verwertung der Symmetrie in Bezug auf die Symmetrieachse durch  $M_2$  die entsprechenden Librationspunkte im Dreieck 2 behandelt, wonach unter Verwertung der Symmetrie in Bezug auf die Symmetrieachse durch  $M_3$  die entsprechenden Librationspunkte im Dreieck 1 behandelt wurden. Damit waren die Librationspunkte oberhalb der  $\xi$ -Achse behandelt. Die symmetrischen Librationspunkte unterhalb der  $\xi$ -Achse erfordern keine spezielle Behandlung, da es sich hier um Symmetrie in Bezug auf eine Koordinatenachse handelt.

Mit 84 Librationspunkten in jedem der kleinen Dreiecke wird die Gesamtzahl der Librationspunkte innerhalb dieser Dreiecke 504. Hierzu kommen noch 61 Librationspunkte, die auf den drei Symmetrieachsen liegen, so dass die Gesamtzahl der Librationspunkte innerhalb des Massendreiecks, deren Schwerpunkt bestimmt ist, die Anzahl von 565 erreicht.

Im folgenden sind die numerischen Resultate der Berechnungen in Tabellenform angegeben. In diesen Tabellen sind nur die Librationspunkte oberhalb der  $\xi$ -Achse berücksichtigt, indem wir die Schwerpunktskoordinaten, welche den in Bezug auf die  $\xi$ -Achse symmetrischen Librationspunkten entsprechen, durch Wechsel des Vorzeichens der Ordinaten finden können. Die Koordinaten sind in den Tabellen Dreieck für Dreieck angegeben, so dass in der ersten Tabelle diejenigen Koordinaten angegeben sind, die dem kleinsten der Dreiecke entsprechen, auf deren Seiten der Librationspunkt verschoben wird; dieses Dreieck wird durch  $\xi = -0.05$  gekennzeichnet. In der letzten Tabelle findet man die Koordinaten, die dem grössten der Dreiecke entsprechen; dieses Dreieck wird durch  $\xi = -0.48$  gekennzeichnet.

Die numerischen Rechnungen sind mit einer Rechenmaschine ausgeführt und zwar im allgemeinen fünfstellig; in gewissen kritischen Fällen sind jedoch die Berechnungen mit noch mehr Stellen ausgeführt. Dennoch führt die ziemlich komplizierte Rechnung in der fünften Stelle des Resultats oft Unsicherheit mit sich. Ich habe es deshalb vorgezogen, die Koordinaten der Librationspunkte und Schwerpunkte nur mit 4 Dezimalen anzugeben.

Tabelle IV.

$$\xi = -0.05.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+0.10	+0	-0.0912	-0
0.0683	0.0183	0.0611	0.0137
+0.0250	0.0433	-0.0204	0.0354
--0.0183	0.0683	+0.0187	0.0598
0.05	0.0866	0.0456	0.0790
0.05	0 05	0.0424	0.0461
-0.05	+0	+0.0408	-0



Tabelle V.

$\xi = -0.10.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+0.20	+0	-0.1864	-0
0.1799	0.0116	0.1674	0.0060
0.1366	0.0366	0.1249	0.0225
0.0933	0.0616	0.0815	0.0429
0.0500	0.0866	-0.0383	0.0663
+0.0067	0.1116	+0.0036	0.0920
-0.0366	0.1366	0.0430	0.1194
0.0799	0.1616	0.0785	0.1480
0.10	0.1732	0.0932	0.1614
0.10	0.15	0.0889	0.1419
0.10	0.10	0.0819	0.0969
0.10	0.05	0.0779	0.0492
-0.10	+0	+0.0765	-0

Tabelle VI.

$\xi = -0.15.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+0.30	+0	-0.2762	-0
0.2482	0.0299	0.2300	0.0102
0.2049	0.0549	0.1881	0.0248
0.1616	0.0799	0.1439	0.0438
0.1183	0.1049	0.0984	0.0663
0.0750	0.1299	0.0528	0.0914
+0.0317	0.1549	-0.0082	0.1184
-0.0116	0.1799	+0.0340	0.1465
0.0549	0.2049	0.0725	0.1753
0.0982	0.2299	0.1062	0.2043
0.15	0.2598	0.1381	0.2392
0.15	0.20	0.1239	0.1941
0.15	0.15	0.1155	0.1505
0.15	0.10	0.1099	0.1027
0.15	0.05	0.1066	0.0521
-0.15	+0	+0.1056	-0

Tabelle VII.

 $\xi = -0.20.$ 

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+0.40	+0	-0.3533	0
0.3598	0.0232	0.3237	+0.0005
0.3165	0.0482	0.2877	-0.0061
0.2732	0.0732	0.2477	0.0187
0.2299	0.0982	0.2044	0.0362
0.1866	0.1232	0.1585	0.0577
0.1433	0.1482	0.1110	0.0823
0.1000	0.1732	0.0630	0.1090
0.0567	0.1982	-0.0158	0.1373
+0.0134	0.2232	+0.0293	0.1661
-0.0299	0.2482	0.0709	0.1951
0.0732	0.2732	0.1077	0.2239
0.1165	0.2982	0.1386	0.2522
0.1598	0.3232	0.1622	0.2801
0.20	0.3464	0.1767	0.3060
0.20	0.30	0.1614	0.2805
0.20	0.25	0.1491	0.2461
0.20	0.20	0.1400	0.2052
0.20	0.15	0.1336	0.1589
0.20	0.10	0.1292	0.1084
0.20	0.05	0.1268	0.0550
--0.20	+0	+0.1259	-0

Tabelle VIII.

$$\xi = -0.25.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+ 0.50	+ 0	- 0.4133	+ 0
0.4714	0.0165	0.3977	0.0082
0.4281	0.0415	0.3704	0.0126
0.3848	0.0665	0.3383	+ 0.0089
0.3415	0.0915	0.3016	- 0.0013
0.2982	0.1165	0.2606	0.0172
0.2549	0.1415	0.2157	0.0376
0.2116	0.1665	0.1679	0.0616
0.1683	0.1915	0.1181	0.0884
0.1250	0.2165	0.0675	0.1169
0.0817	0.2415	- 0.0175	0.1465
+ 0.0384	0.2665	+ 0.0306	0.1762
- 0.0049	0.2915	0.0753	0.2056
0.0482	0.3165	0.1154	0.2342
0.0915	0.3415	0.1496	0.2619
0.1348	0.3665	0.1769	0.2885
0.1781	0.3915	0.1961	0.3144
0.2214	0.4165	0.2060	0.3404
0.25	0.4330	0.2067	0.3579
0.25	0.40	0.1918	0.3486
0.25	0.35	0.1743	0.3270
0.25	0.30	0.1614	0.2974
0.25	0.25	0.1520	0.2605
0.25	0.20	0.1452	0.2171
0.25	0.15	0.1404	0.1680
0.25	0.10	0.1373	0.1146
0.25	0.05	0.1356	0.0581
- 0.25	+ 0	+ 0.1350	- 0

Tabelle IX.

$\eta\epsilon = -0.30.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+ 0.60	+ 0	- 0.4554	+ 0
0.5397	0.0348	0.4312	0.0308
0.4964	0.0598	0.4085	0.0393
0.4531	0.0848	0.3808	0.0390
0.4098	0.1098	0.3481	0.0314
0.3665	0.1348	0.3104	+ 0.0176
0.3232	0.1598	0.2678	- 0.0015
0.2799	0.1848	0.2210	0.0248
0.2366	0.2098	0.1707	0.0516
0.1933	0.2348	0.1180	0.0807
0.1500	0.2598	0.0643	0.1114
0.1067	0.2848	- 0.0109	0.1426
0.0634	0.3098	+ 0.0407	0.1736
+ 0.0201	0.3348	0.0890	0.2038
- 0.0232	0.3598	0.1326	0.2327
0.0665	0.3848	0.1704	0.2600
0.1098	0.4098	0.2013	0.2858
0.1531	0.4348	0.2242	0.3103
0.1964	0.4598	0.2382	0.3341
0.2397	0.4848	0.2422	0.3580
0.30	0.5196	0.2277	0.3944
0.30	0.45	0.1889	0.3888
0.30	0.40	0.1702	0.3734
0.30	0.35	0.1567	0.3493
0.30	0.30	0.1469	0.3172
0.30	0.25	0.1400	0.2776
0.30	0.20	0.1352	0.2312
0.30	0.15	0.1320	0.1790
0.30	0.10	0.1300	0.1220
0.30	0.05	0.1289	0.0619
- 0.30	+ 0	+ 0.1286	- 0

Tabelle X.

$$\xi = -0.35.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+0.70	+0	-0.4813	+0
0.6513	0.0281	0.4701	0.0488
0.6080	0.0531	0.4562	0.0742
0.5647	0.0781	0.4379	0.0876
0.5214	0.1031	0.4149	0.0913
0.4781	0.1281	0.3864	0.0870
0.4348	0.1531	0.3525	0.0757
0.3915	0.1781	0.3129	0.0585
0.3482	0.2031	0.2679	0.0361
0.3049	0.2281	0.2180	+0.0095
0.2616	0.2531	0.1642	-0.0203
0.2183	0.2781	0.1076	0.0524
0.1750	0.3031	-0.0495	0.0857
0.1317	0.3281	+0.0084	0.1194
0.0884	0.3531	0.0645	0.1524
0.0451	0.3781	0.1173	0.1840
+0.0018	0.4031	0.1652	0.2139
-0.0415	0.4281	0.2071	0.2417
0.0848	0.4531	0.2418	0.2674
0.1281	0.4781	0.2685	0.2912
0.1714	0.5031	0.2865	0.3136
0.2147	0.5281	0.2948	0.3355
0.2580	0.5531	0.2924	0.3580
0.3013	0.5781	0.2773	0.3827
0.35	0.6062	0.2407	0.4168
0.35	0.55	0.1928	0.4315
0.35	0.50	0.1638	0.4322
0.35	0.45	0.1431	0.4231
0.35	0.40	0.1284	0.4049
0.35	0.35	0.1179	0.3782
0.35	0.30	0.1107	0.3431
0.35	0.25	0.1058	0.3002
0.35	0.20	0.1027	0.2500
0.35	0.15	0.1008	0.1936
0.35	0.10	0.0997	0.1320
0.35	0.05	0.0992	0.0669
-0.35	+0	+0.0990	-0

Tabelle XI.

$$\xi = -0.40.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+ 0.80	+ 0	-- 0.4946	+ 0
0.7629	0.0214	0.4907	0.0695
0.7196	0.0464	0.4838	0.1216
0.6763	0.0714	0.4736	0.1544
0.6330	0.0964	0.4594	0.1736
0.5897	0.1214	0.4405	0.1822
0.5464	0.1464	0.4162	0.1819
0.5031	0.1714	0.3860	0.1738
0.4598	0.1964	0.3494	0.1589
0.4165	0.2214	0.3064	0.1380
0.3732	0.2464	0.2572	0.1118
0.3299	0.2714	0.2023	0.0812
0.2866	0.2964	0.1428	0.0472
0.2433	0.3214	0.0799	+ 0.0111
0.2000	0.3464	-- 0.0152	-- 0.0262
0.1567	0.3714	+ 0.0495	0.0636
0.1134	0.3964	0.1123	0.1001
0.0701	0.4214	0.1715	0.1346
+ 0.0268	0.4464	0.2254	0.1669
-- 0.0165	0.4714	0.2727	0.1964
0.0598	0.4964	0.3123	0.2231
0.1031	0.5214	0.3435	0.2473
0.1464	0.5464	0.3656	0.2695
0.1897	0.5714	0.3781	0.2904
0.2330	0.5964	0.3801	0.3111
0.2763	0.6214	0.3705	0.3330
0.3196	0.6464	0.3472	0.3582
0.3629	0.6714	0.3055	0.3902
0.40	0.6928	0.2473	0.4283
0.40	0.65	0.1852	0.4597
0.40	0.60	0.1366	0.4798
0.40	0.55	0.1031	0.4874
0.40	0.50	0.0794	0.4847
0.40	0.45	0.0625	0.4726
0.40	0.40	0.0506	0.4514
0.40	0.35	0.0424	0.4212
0.40	0.30	0.0371	0.3820
0.40	0.25	0.0337	0.3343
0.40	0.20	0.0318	0.2786
0.40	0.15	0.0309	0.2158
0.40	0.10	0.0305	0.1473
0.40	0.05	0.0304	0.0747
-- 0.40	+ 0	+ 0.0303	-- 0

Tabelle XII.

$$\xi = -0.45.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+ 0.90	+ 0	- 0.4993	+ 0
0.8312	0.0397	0.4963	0.2137
0.7879	0.0647	0.4919	0.2786
0.7446	0.0897	0.4847	0.3199
0.7013	0.1147	0.4738	0.3452
0.6580	0.1397	0.4582	0.3586
0.6147	0.1647	0.4372	0.3623
0.5714	0.1897	0.4098	0.3574
0.5281	0.2147	0.3753	0.3448
0.4848	0.2397	0.3333	0.3252
0.4415	0.2647	0.2835	0.2991
0.3982	0.2897	0.2261	0.2673
0.3549	0.3147	0.1618	0.2307
0.3116	0.3397	0.0916	0.1902
0.2683	0.3647	- 0.0172	0.1472
0.2250	0.3897	+ 0.0594	0.1029
0.1817	0.4147	0.1361	0.0587
0.1384	0.4397	0.2106	+ 0.0158
0.0951	0.4647	0.2807	- 0.0248
0.0518	0.4897	0.3446	0.0622
+ 0.0085	0.5147	0.4008	0.0960
- 0.0348	0.5397	0.4483	0.1261
0.0781	0.5647	0.4863	0.1526
0.1214	0.5897	0.5144	0.1762
0.1647	0.6147	0.5323	0.1974
0.2080	0.6397	0.5397	0.2175
0.2513	0.6647	0.5359	0.2377
0.2946	0.6897	0.5194	0.2598
0.3379	0.7147	0.4873	0.2867
0.3812	0.7397	0.4332	0.3230
0.45	0.7794	0.2497	0.4324
0.45	0.70	0.0631	0.5367
0.45	0.65	+ 0.0047	0.5654
0.45	0.60	- 0.0347	0.5797
0.45	0.55	0.0621	0.5829
0.45	0.50	0.0815	0.5761
0.45	0.45	0.0952	0.5597
0.45	0.40	0.1047	0.5336
0.45	0.35	0.1110	0.4975
0.45	0.30	0.1150	0.4513

(fortgesetzt).

Tabelle XII (fortgesetzt).

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
0.45	0.25	0.1173	0.3951
0.45	0.20	0.1185	0.3295
0.45	0.15	0.1189	0.2554
0.45	0.10	0.1189	0.1745
0.45	0.05	0.1189	0.0885
-0.45	+0	-0.1188	-0

Tabelle XIII.

$$\xi = -0.48.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
+ 0.96	+ 0	- 0.5000	+ 0
0.8895	0.0407	0.4988	0.3970
0.8462	0.0657	0.4963	0.4792
0.8029	0.0907	0.4915	0.5269
0.7596	0.1157	0.4834	0.5551
0.7163	0.1407	0.4711	0.5704
0.6730	0.1657	0.4535	0.5757
0.6297	0.1907	0.4296	0.5726
0.5864	0.2157	0.3983	0.5618
0.5431	0.2407	0.3588	0.5438
0.4998	0.2657	0.3103	0.5189
0.4565	0.2907	0.2527	0.4874
0.4132	0.3157	0.1859	0.4497
0.3699	0.3407	0.1108	0.4066
0.3266	0.3657	- 0.0287	0.3593
0.2833	0.3907	+ 0.0585	0.3089
0.2400	0.4157	0.1484	0.2570
0.1967	0.4407	0.2383	0.2051
0.1534	0.4657	0.3255	0.1548
0.1101	0.4907	0.4076	0.1073
0.0668	0.5157	0.4824	0.0639
+ 0.0235	0.5407	0.5484	+ 0.0249
- 0.0198	0.5657	0.6046	- 0.0093
0.0631	0.5907	0.6504	0.0388
0.1064	0.6157	0.6857	0.0640
0.1497	0.6407	0.7107	0.0858
0.1930	0.6657	0.7253	0.1049

(fortgesetzt).



Tabelle XIII (fortgesetzt).

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
0.2363	0.6907	0.7295	0.1228
0.2796	0.7157	0.7224	0.1411
0.3229	0.7407	0.7020	0.1622
0.3662	0.7657	0.6631	0.1902
0.4095	0.7907	0.5932	0.2335
0.48	0.8314	+ 0.2500	0.4330
0.48	0.75	- 0.0944	0.6305
0.48	0.70	0.1668	0.6694
0.48	0.65	0.2105	0.6890
0.48	0.60	0.2390	0.6962
0.48	0.55	0.2584	0.6931
0.48	0.50	0.2718	0.6806
0.48	0.45	0.2811	0.6583
0.48	0.40	0.2874	0.6259
0.48	0.35	0.2916	0.5826
0.48	0.30	0.2943	0.5282
0.48	0.25	0.2958	0.4625
0.48	0.20	0.2965	0.3859
0.48	0.15	0.2968	0.2993
0.48	0.10	0.2968	0.2045
0.48	0.05	0.2968	0.1038
- 0.48	+ 0	- 0.2967	- 0

Zur Veranschaulichung des Inhalts der Tabellen dienen folgende drei Abbildungen. Abb. 16 zeigt die Kurven, die der Schwerpunkt durchläuft, wenn der Librationspunkt den Umkreis der vier kleinsten Dreiecke durchläuft. Bis zum Auftreten der Schleifenbildung findet die Bewegung des Schwerpunktes in derselben Umlaufsrichtung statt wie die Bewegung des Librationspunktes, die Lage der Punkte auf den Kurven aber wird ungefähr um  $180^\circ$  im Verhältnis zu einander verschoben sein. — Abb. 17 zeigt die Schwerpunktskurven, die den drei folgenden Dreiecken entsprechen. Die Schleifen haben sich hier entwickelt und nähern sich stark den Seiten des Massendreiecks. — Endlich zeigt Abb. 18 die Schwerpunktskurven, die den drei grössten Dreiecken entsprechen. Gleichzeitig damit, dass die Schleifen grösser werden, nähern sich diese

immer mehr den Seiten des Massendreiecks und gleiten nach und nach übereinander. Wenn wir die Kurve betrachten, die dem grössten Dreieck entspricht, werden wir sehen, dass

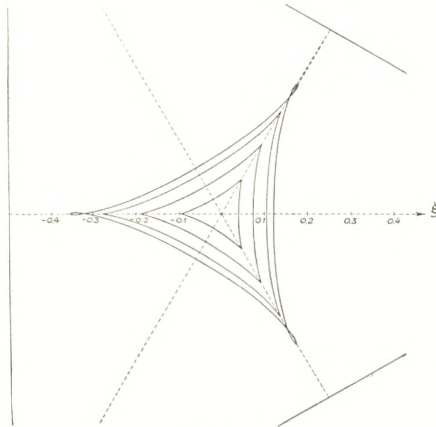


Abb. 16.

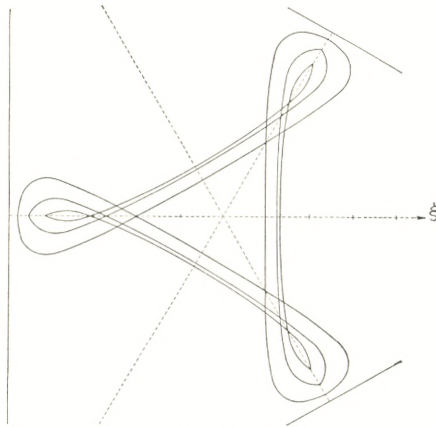


Abb. 17.

jedem Umlauf des Librationspunktes zwei Umläufe des Schwerpunktes in entgegengesetzter Richtung entsprechen. Denken wir uns die Entwicklung fortgesetzt, so dass die Bewegung des Librationspunktes immer näher an den Seiten des Massendreiecks stattfindet, so wird das Resultat augenscheinlich, dass auch die

Bewegung des Schwerpunktes immer näher an den Seiten des Massendreiecks verlaufen wird; wenn sich der Librationspunkt aber einen Umlauf bewegt, wird sich der Schwerpunkt zwei Umläufe in entgegengesetzter Umlaufrichtung bewegen.

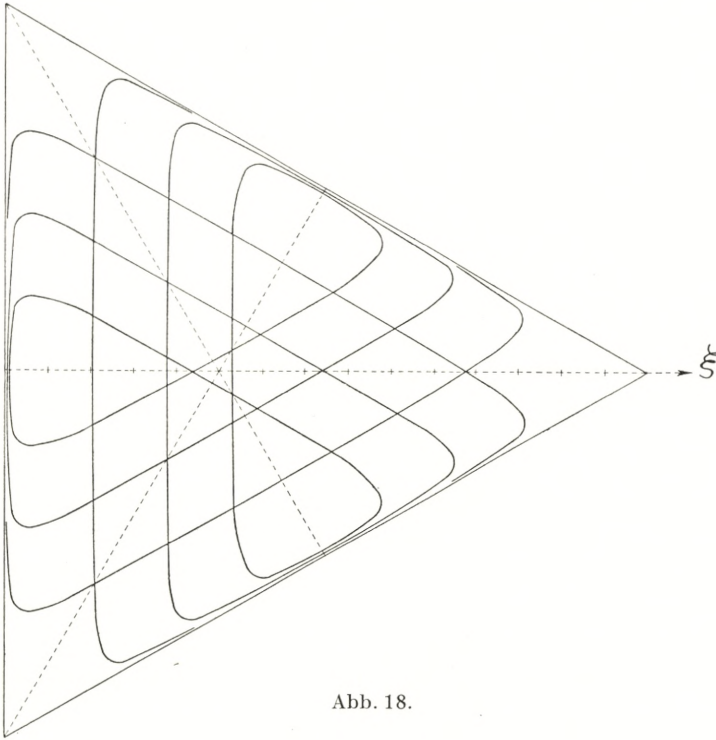


Abb. 18.

Aus dem Vorhergehenden geht nun folgendes hervor: Einem Librationspunkt *innerhalb* des Massendreiecks entspricht ein Schwerpunkt *innerhalb* des Massendreiecks.

Da es ferner einleuchtend ist, dass, gleichzeitig damit, dass der Librationspunkt das ganze Areal des Massendreiecks durchläuft, der Schwerpunkt mindestens ein Mal dieses Areal durchlaufen wird, erhalten wir folgendes Resultat: Einem Schwerpunkt *innerhalb* des Massendreiecks entspricht mindestens ein Librationspunkt *innerhalb* des Massendreiecks.

Dass einem Schwerpunkt innerhalb des Massendreiecks mehrere Librationspunkte innerhalb dieses Dreiecks entsprechen können, geht schon aus dem LINDOWSchen Spezialfall hervor; in diesem Fall liegen vier Librationspunkte innerhalb des Massendreiecks.

#### 4. Der Librationspunkt ausserhalb des Massendreiecks (Gebiet II).

Bei der numerischen Untersuchung des Falles, wo der Librationspunkt im Gebiet II liegt, können wir uns bei den Berechnungen auf die Behandlung eines einzelnen der drei kongruenten Teile, woraus das Gebiet besteht, beschränken. Es wird deshalb wegen der Symmetrie in Bezug auf die  $\xi$ -Achse am praktischsten sein, den Teil des Gebietes, der bei  $M_1$  ( $II_1$ ) liegt, zu behandeln.

Da der Zusammenhang zwischen der Bewegung des Librationspunktes und des Schwerpunktes für Gebiet II nicht so komplizierter Natur ist wie für Gebiet I, steht dem nichts im Wege, hier den Librationspunkt in grösseren Schritten zu verschieben. Um die Verschiebung des Librationspunktes auf einfache Weise der Begrenzung des Gebietes anzupassen, wollen wir die Verschiebung auf geraden Linien durch  $M_1$  erfolgen lassen. Die Länge der Schritte ist mit 0.2 gewählt, so dass für jede Linie Berechnungen für acht Librationspunkte ausgeführt werden müssen ( $q_1 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2; 1.4; 1.6$ ). Als Linien für die Verschiebung des Librationspunktes sind die vier Linien gewählt worden, die mit der  $\xi$ -Achse die Winkel  $-20^\circ, -10^\circ, 10^\circ$  und  $20^\circ$  bilden. Die  $\xi$ -Achse selbst und die zwei Linien, die einen Teil der Begrenzung des Gebietes bilden, müssen noch hinzugefügt werden; die Verhältnisse auf diesen Linien sind jedoch schon im Vorhergehenden behandelt worden (III, 1; III, 2). Dadurch wird die Gesamtzahl der Librationspunkte innerhalb des Gebietes  $II_1$ , für die der Schwerpunkt bestimmt ist, 57; wenn die entsprechenden Librationspunkte in den zwei anderen Gebieten mitgerechnet werden, erreichen wir im Gebiet II eine Gesamtzahl von 171.

Die Tabellen XIV—XVI enthalten die numerischen Resultate für die Librationspunkte auf den drei Linien:  $\varphi = 10^\circ, \varphi = 20^\circ$

Tabelle XIV.

$\varphi = 10^\circ$ .

$\varrho_1$	$\sigma$	$\tau$
0.2	-0.4950	-0.2034
0.4	0.4622	0.2140
0.6	0.3816	0.2123
0.8	0.2430	0.1975
1.0	-0.0464	0.1703
1.2	+0.1997	0.1325
1.4	0.4830	0.0868
1.6	+0.7900	-0.0356

Tabelle XV.

$\varphi = 20^\circ$ .

$\varrho_1$	$\sigma$	$\tau$
0.2	-0.4947	-0.4535
0.4	0.4602	0.4664
0.6	0.3763	0.4550
0.8	0.2340	0.4178
1.0	-0.0346	0.3562
1.2	+0.2122	0.2746
1.4	0.4931	0.1783
1.6	+0.7949	-0.0726

und  $\varphi = 30^\circ$ . Wegen der Symmetrie in Bezug auf die  $\xi$ -Achse ist es nicht notwendig, in den Tabellen die Librationspunkte unterhalb der  $\xi$ -Achse mitzunehmen. Für die Librationspunkte auf der  $\xi$ -Achse wird auf Tabelle I verwiesen.

Tabelle XVI.

$\varphi = 30^\circ$ .

$\varrho_1$	$\sigma$	$\tau$
0.2	-0.4938	-0.8624
0.4	0.4551	0.8401
0.6	0.3642	0.7876
0.8	0.2144	0.7011
1.0	-0.0100	0.5831
1.2	+0.2372	0.4404
1.4	0.5130	0.2812
1.6	+0.8043	-0.1130

Abb. 19 zeigt das Gebiet  $II_1$  mit eingezeichneten Librationspunkten, sowie das Massendreieck mit eingezeichneten Schwer-

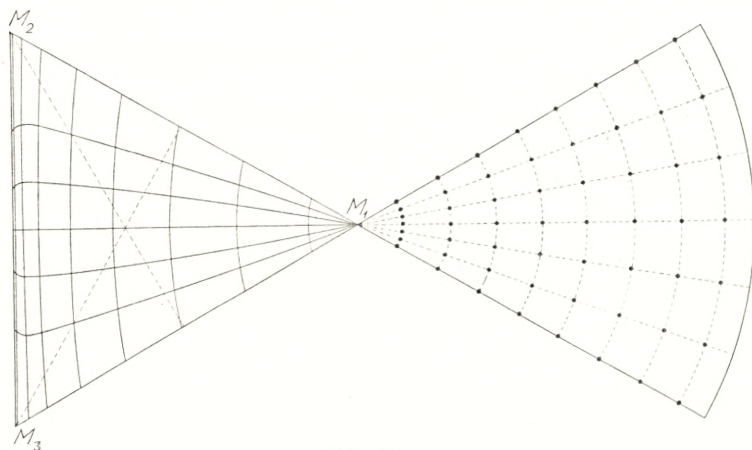


Abb. 19.

punkten. Wenn der Librationspunkt von  $M_1$  aus auf einer geraden Linie bis zum Librationskreis  $l_1$  verschoben wird, geht gleichzeitig eine Verschiebung des Schwerpunktes von einem Punkt auf  $M_2 M_3$  bis  $M_1$  auf einer Kurve vor sich, die in dem grössten Teil ihres Laufes wenig von einer geraden Linie abweicht. Es geht deutlich aus dem Lauf der Schwerpunktskurven hervor, dass, wenn der Librationspunkt das ganze Gebiet  $II_1$  durchläuft, der Schwerpunkt gleichzeitig das Gebiet des Massendreiecks ein und nur ein Mal durchlaufen wird. Hieraus folgt:

Einem Schwerpunkt innerhalb des Massendreiecks entspricht ein und nur ein Librationspunkt innerhalb jedes der drei Gebiete  $II_1$ ,  $II_2$  und  $II_3$ .

### 5. Der Librationspunkt ausserhalb des Massendreiecks (Gebiet III).

In ähnlicher Weise wie bei der Behandlung des Gebiets II können wir uns hier mit der Behandlung eines einzelnen der drei kongruenten Gebiete, die zusammen das Gebiet III ausmachen, begnügen. Es wird dann am leichtesten sein, das Gebiet zu behandeln, das in Bezug auf die  $\xi$ -Achse symmetrisch liegt ( $III_1$ ).

Auch in diesem Fall wird der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen des Librationspunktes und des Schwerpunktes ziemlich einfacher Natur sein, so dass man sich bei der Behandlung damit begnügen kann, eine verhältnismässig kleine Anzahl von Librationspunkten zu betrachten. Abb. 20 zeigt das Gebiet  $III_1$  mit den Librationspunkten, die bei der Berechnung angewandt sind. Diese liegen auf Kreisbogen mit dem Zentrum in  $M_1$  und mit den Radien  $\varrho_1 = 1.8; 2.0; 2.2; 2.4; 2.6; 2.8$ . Jeder einzelne Kreisbogen des Gebietes ist von den Librationspunkten in acht gleich grosse Bogen geteilt. Hierdurch werden die Librationspunkte um  $P_1$  herum am dichtesten liegen, was der Streuung der entsprechenden Schwerpunkte zum Teil entgegenwirkt. Auf jedem einzelnen der sechs Kreisbogen liegen 9 Librationspunkte, so dass die Gesamtzahl der Librationspunkte im Gebiet  $III_1$  54 beträgt; wenn die entsprechenden Librationspunkte in den zwei anderen Gebieten mitgerechnet werden, so erhalten wir im Gebiet III 162 Librationspunkte.

Die Tabellen XVII—XXII enthalten die Koordinaten der Librationspunkte und der Schwerpunkte. Wegen der Symmetrie in Bezug auf die  $\xi$ -Achse ist es nicht notwendig, in den Tabellen die Librationspunkte unterhalb der  $\xi$ -Achse mitzunehmen; berücksichtigt sind auch nicht die Librationspunkte auf dem Librationskreis  $l_3$ , weil der entsprechende Schwerpunkt in  $M_3$  liegt. Die Librationspunkte auf der  $\xi$ -Achse sind schon früher behan-

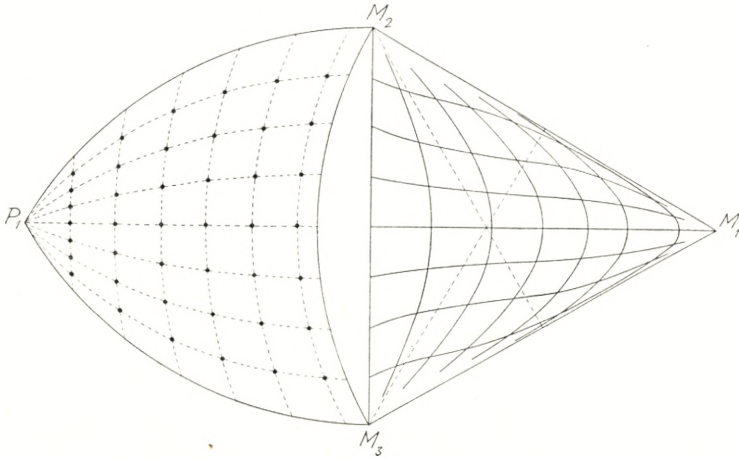


Abb. 20.

delt worden (III,1); der Vollständigkeit wegen sind jedoch auch diese Punkte in den Tabellen mit aufgenommen.

Die den Librationspunkten entsprechenden Schwerpunkte sind im Massendreieck in der Abb. 20 gezeigt. Wenn der Librationspunkt längs eines der Kreisbögen vom Librationskreis  $l_2$  nach  $l_3$  verschoben wird, so wird der Schwerpunkt gleichzeitig

Tabelle XVII.

$$q_1 = 1.8.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
-0.8	+0	+0.8468	-0
0.7859	0.2248	0.8262	0.0550
0.7439	0.4460	0.7545	0.1234
-0.6745	+0.6603	+0.5821	-0.2371

Tabelle XVIII.

$\varrho_1 = 2.0.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
-1.0	+0	+0.6244	-0
0.9884	0.2154	0.5928	0.1115
0.9536	0.4284	0.4905	0.2339
-0.8961	+0.6363	+0.2747	-0.3964

Tabelle XIX.

$\varrho_1 = 2.2.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
-1.2	+0	+0.4479	-0
1.1911	0.1972	0.4167	0.1317
1.1646	0.3929	0.3146	0.2754
-1.1207	+0.5854	+0.0987	-0.4625

Tabelle XX.

$\varrho_1 = 2.4.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
-1.4	+0	+0.2506	-0
1.3941	0.1690	0.2223	0.1442
1.3762	0.3371	+0.1297	0.3032
-1.3466	+0.5035	-0.0625	-0.5074

Tabelle XXI.

$\varrho_1 = 2.6.$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
-1.6	+0	+0.0239	-0
1.5968	0.1288	+0.0011	0.1580
1.5872	0.2574	-0.0727	0.3318
-1.5713	+0.3853	-0.2187	-0.5471



Tabelle XXII.

$$q_1 = 2.8.$$

$\xi$	$\eta$	$\sigma$	$\tau$
-1.8	+0	-0.2285	-0
1.7990	0.0742	0.2425	0.1796
1.7961	0.1483	0.2863	0.3715
-1.7912	+0.2223	-0.3669	-0.5916

einer der gezeigten Kurven entlang von  $M_2$  nach  $M_3$  verschoben. Der Kreisbogen, der  $l_1$  am nächsten liegt, entspricht der Schwerpunktskurve, die  $M_1$  am nächsten liegt, während der Kreisbogen, der  $P_1$  am nächsten liegt, der Schwerpunktskurve entspricht, die  $M_2 M_3$  am nächsten liegt. Der Punkt  $P_1$  selbst entspricht der Linie  $M_2 M_3$ , ebenso wie der Kreisbogen  $l_1$  dem Punkt  $M_1$  entspricht. Es geht aus der Abbildung hervor, dass, wenn der Librationspunkt das ganze Gebiet  $III_1$  durchläuft, der Schwerpunkt gleichzeitig das Gebiet des Massendreiecks ein und nur ein Mal durchlaufen wird. Hieraus folgt:

Einem Schwerpunkt innerhalb des Massendreiecks entspricht ein und nur ein Librationspunkt innerhalb jedes der drei Gebiete  $III_1$ ,  $III_2$  und  $III_3$ .

## 6. Übersicht über die numerischen Resultate.

Nachdem nun eine vollständige Übersicht über die Verschiebungen des Schwerpunktes, die bestimmten gegebenen Verschiebungen des Librationspunktes entsprechen, zustandegebracht ist, liegt es nahe, das Problem umzukehren, indem man — von den numerischen Resultaten ausgehend — versucht, die Verschiebungen der Librationspunkte für bestimmte gegebene Verschiebungen des Schwerpunktes zu bestimmen.

Dieses Problem ist gewissermassen von komplizierterer Natur als das ursprüngliche Problem, da es sich hier darum handelt, die gleichzeitige Bewegung einer grösseren Anzahl von Librationspunkten klarzulegen. Dies lässt sich an und für sich schon machen, wegen der verwickelten Verhältnisse wird eine solche Untersuchung aber kaum von grösserem Wert sein. Dagegen wird man eine gute Übersicht über die Verhältnisse bekommen,

wenn man den Schwerpunkt bestimmte Gebiete innerhalb des Massendreiecks durchlaufen lässt und dann die Gebiete bestimmt, die gleichzeitig von den entsprechenden Librationspunkten durchlaufen werden.

Die im folgenden gefundenen Kurven, die diese Verhältnisse veranschaulichen sollen, sind alle durch Interpolation zwischen den in früheren Tabellen gegebenen Zahlenwerten gefunden worden.

Die Untersuchung wird nun zunächst für diejenigen Librationspunkte durchgeführt werden, die sich im Gebiet I befinden.

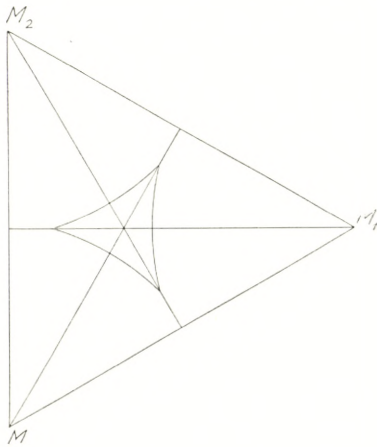


Abb. 21.

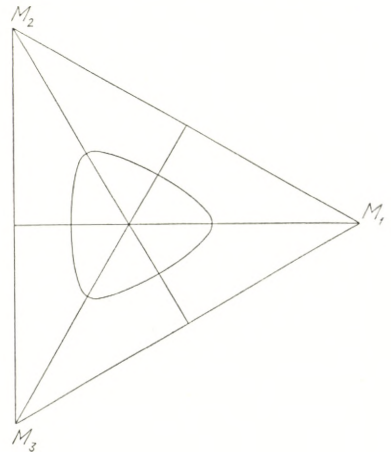


Abb. 22.

Wie schon früher erwähnt, wird in diesem Gebiet mehr als ein Librationspunkt einem bestimmten Schwerpunkt entsprechen können. Dies Verhältnis beruht darauf, dass, gleichzeitig damit, dass der Librationspunkt ein einzelnes Mal durch das ganze Gebiet I verschoben wird, der Schwerpunkt jedenfalls durch gewisse Teile des Gebietes mehr als ein Mal verschoben wird. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass ein kleiner Teil des Massendreiecks um den Mittelpunkt des Dreiecks viermal vom Schwerpunkt durchlaufen wird, während der übrige Teil des Dreiecks nur zweimal durchlaufen wird. Die Kurve, welche die zwei Teile des Dreiecks trennt, sieht man auf Abb. 21; sie wird im folgenden als die Schwerpunktsgrenzkurve bezeichnet werden. Die zwei Schnittpunkte zwischen der Kurve und der  $\xi$ -Achse haben die Abszissen

0.135171 und  $-0.320605$ . Liegt der Schwerpunkt innerhalb dieser Grenzkurve, gibt es also vier Librationspunkte im Gebiet I; wenn er dagegen ausserhalb der Grenzkurve liegt, gibt es nur zwei Librationspunkte im Gebiet I. Denkt man sich eine Verschiebung des Schwerpunktes aus dem inneren ins äussere Gebiet, wird der Übergang von vier auf zwei Librationspunkte dadurch geschehen, dass zwei der Librationspunkte sich einander nähern, um sich in einen Doppelpunkt zu vereinen, wenn der Schwerpunkt auf der Grenzkurve selbst liegt; dieser Doppelpunkt verschwindet, sobald die Grenzkurve passiert ist.

Dem Schwerpunkt in einem bestimmten Punkt der Grenzkurve muss deshalb eine bestimmte Lage des Librationsdoppelpunktes entsprechen, oder mit anderen Worten: der Schwerpunktsgrenzkurve muss eine Kurve der Librationsdoppelpunkte entsprechen. Diese Kurve sieht man in Abb. 22. Ihre Schnittpunkte mit der  $\xi$ -Achse haben die Abszissen 0.355111 und  $-0.257$ , die den oben erwähnten Schwerpunktsabszissen entsprechen, wie im Schema gezeigt ist.

$\xi$	$\sigma$
0.355111	$-0.320605$
$-0.257$	0.135171

Der untere Satz von Werten ist schon während der Behandlung des Spezialfalles erwähnt, wo der Schwerpunkt sich auf einer Symmetrieachse befindet (III, 1). Wenn der Schwerpunkt auf der  $\xi$ -Achse von  $M_1$  aus verschoben wird, wird es, wie aus Abb. 13 hervorgeht, anfangs keine Librationspunkte auf dem Teil der  $\xi$ -Achse geben, der innerhalb des Massendreiecks liegt; die zwei Librationspunkte, die im Gebiet I liegen, müssen also ausserhalb der  $\xi$ -Achse liegen. Wenn aber der Schwerpunkt den Punkt mit der Abszisse 0.135171 erreicht hat, taucht ein Librationsdoppelpunkt mit der Abzisse  $-0.257$  auf, dem Maximum der Kurve in Abb. 13 entsprechend. Wenn der Schwerpunkt danach innerhalb der Grenzkurve wandert, entstehen im Gebiet I vier Librationspunkte, und zwar zwei auf der  $\xi$ -Achse und zwei ausserhalb der  $\xi$ -Achse. Erreicht dann der Schwerpunkt die Spitze der Schwerpunktsgrenzkurve mit der Abszisse  $-0.320605$ , so werden, wie wir später sehen werden, die zwei ausserhalb der

$\xi$ -Achse liegenden Librationspunkte zu einem Librationsdoppelpunkt auf der  $\xi$ -Achse selbst und mit der Abszisse 0.355111 zusammenschmelzen. Dieser Librationsdoppelpunkt, der im Verschwinden begriffen ist, fällt übrigens mit einem der zwei auf der  $\xi$ -Achse liegenden Librationspunkte zusammen, so dass in der Tat von einem Librationstripelpunkt die Rede ist. Bei der weiteren Verschiebung des Schwerpunktes bleiben nur zwei Librationspunkte zurück, die beide auf der  $\xi$ -Achse liegen.

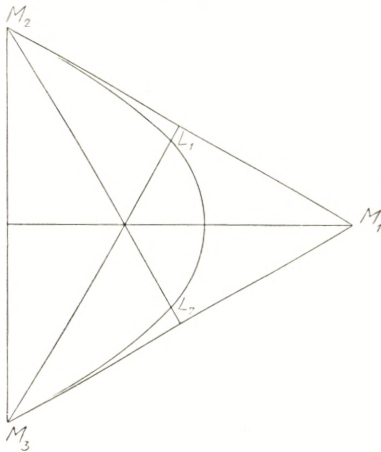


Abb. 23.

Die Kurve, die von den zwei ausserhalb der  $\xi$ -Achse liegenden Librationspunkten durchlaufen wird, wenn der Schwerpunkt die  $\xi$ -Achse durchläuft, sehen wir in Abb. 23. Beim Starten des Schwerpunktes von  $M_1$  aus liegen die zwei Librationspunkte in  $M_2$  und  $M_3$ . Während der Verschiebung des Schwerpunktes von  $M_1$  nach dem Mittelpunkt des Dreiecks werden die zwei Librationspunkte von den Eckpunkten des Dreiecks nach den LINDOWSchen Librationspunkten  $L_1$  und  $L_7$  verschoben. Während der weiteren

Verschiebung des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Dreiecks nach dem Punkt mit der Abszisse  $-0.320605$  wandern die Librationspunkte weiter auf der gezeigten Kurve, um sich auf der  $\xi$ -Achse im Punkt mit der Abszisse 0.355111 zu vereinen.

Die Übersicht, die wir jetzt über die Verschiebungen der vier Librationspunkte als Folge der Verschiebung des Schwerpunktes auf der Symmetrieachse durch  $M_1$  erlangt haben, kann direkt auf die Verschiebungen des Schwerpunktes auf den zwei Symmetrieachsen durch  $M_2$  und  $M_3$  übertragen werden. Die Schwerpunktsgrenzkurve und die Kurve der Librationsdoppelpunkte werden selbstverständlich bei den drei Symmetrieachsen dieselben sein; dagegen wird die Kurve der ausserhalb der Symmetrieachse liegenden Librationspunkte in den drei Fällen verschieden sein. In Abb. 24 sehen wir alle drei Librationspunktcurven. Diese drei Kurven werden jetzt mit den drei Symmetrieachsen

und den drei Dreiecksseiten zusammen das Dreieck in 18 Abschnitte teilen. Für diese Abschnitte gilt es, dass, wenn der Schwerpunkt auf den drei Dreiecksseiten oder den drei Symmetrieachsen verschoben wird, der Librationspunkt sich gleichzeitig auf den Linien oder Kurven, die die Grenze der Abschnitte bilden, verschiebt. Wenn also der Schwerpunkt auf dem Umkreis des in Abb. 25 gezeigten Dreiecks 1 verschoben wird, werden die Librationspunkte sich gleichzeitig auf den Umkreis der drei Ab-

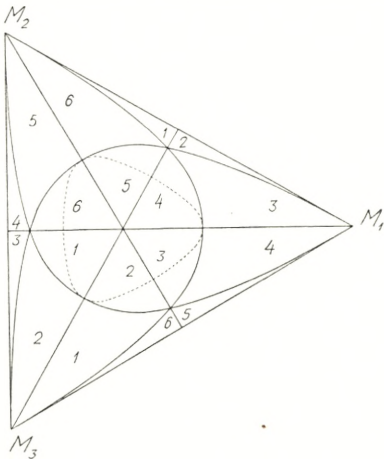


Abb. 24.

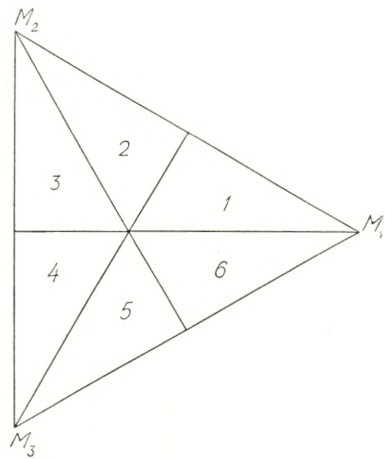


Abb. 25.

schnitte 1 in Abb. 24 verschieben. Die zwei äusseren Abschnitte werden beide einen Librationspunkt auf dem Umkreis haben, während der innere Abschnitt entweder zwei Librationspunkte (wenn der Schwerpunkt innerhalb der Schwerpunktsgrenzkurve liegt) oder keine Librationspunkte auf dem Umkreis hat. Liegt dagegen der Schwerpunkt innerhalb des Dreiecks 1, wird ein Librationspunkt innerhalb jedes der zwei äusseren Abschnitte liegen, während innerhalb des inneren Abschnittes entweder zwei Librationspunkte (wenn der Schwerpunkt innerhalb der Schwerpunktsgrenzkurve liegt) oder keine Librationspunkte liegen. Wenn zwei Librationspunkte im inneren Abschnitt liegen, so werden sie jeder auf seiner Seite der gestrichelten Kurve liegen, die die Kurve der Librationsdoppelpunkte darstellt. Diese Kurve darf als eine Verschwindungskurve der Librationspunkte aufgefasst werden. Wenn zwei Librationspunkte verschwinden sollen, wandern

sie nach dieser Kurve hin. Auf der Kurve werden sie sich in einem Librationsdoppelpunkt vereinen und dort verschwinden.

In derselben Weise wie drei Abschnitte dem Dreieck 1 entsprechen, werden drei Abschnitte jedem der anderen fünf Dreiecke im Gebiet I entsprechen. Vergleicht man Abb. 24 mit Abb. 25, so sieht man, wie die 18 Abschnitte für die Librationspunkte in Abb. 24 den Dreiecken in Abb. 25 entsprechen. Ein näheres Studium der Lage und der Form der Abschnitte kann zu vielen interessanten Beobachtungen Anlass geben. Hier soll nur auf zwei Tatsachen aufmerksam gemacht werden: 1°. Die drei Schnittpunkte zwischen den drei Librationspunktkurven sind gerade die LINDOWSchen Librationspunkte  $L_1$ ,  $L_4$  und  $L_7$ . — 2°. Es geht aus der Rechnung ziemlich sicher hervor, dass die Kurve der Librationsdoppelpunkte die drei Librationspunktkurven berührt.

Die Librationspunkte im Gebiet II können in derselben Weise wie die Librationspunkte im Gebiet I behandelt werden. Wegen der Symmetrieverhältnisse genügt es, die Verhältnisse in  $II_1$  zu behandeln.

Wird der Schwerpunkt von  $M_1$  auf der Symmetrieachse des Massendreiecks verschoben, so wird der Librationspunkt, der

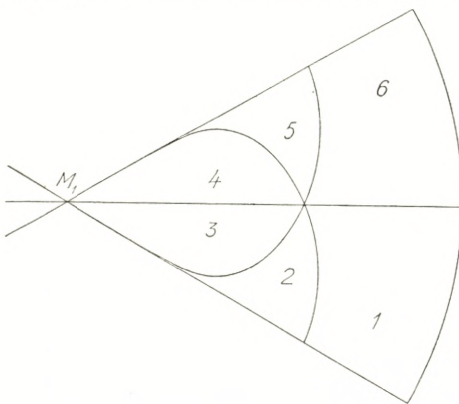


Abb. 26.

in  $II_1$  liegt, gleichzeitig vom Librationskreis  $l_1$  nach  $M_1$  auf der  $\xi$ -Achse verschoben. Wird dagegen der Schwerpunkt auf den anderen zwei Symmetrieachsen verschoben, so wird der Librationspunkt auf den zwei Kurven, die in Abb. 26 gezeigt sind, verschoben. Diese zwei Kurven in Verbindung mit der  $\xi$ -Achse werden  $II_1$  in sechs Abschnitte teilen, die den sechs kongruenten Dreiecken des Massendreiecks entsprechen, wie die Zahlen in der Abbildung zeigen.

Der Schnittpunkt zwischen den zwei Kurven, die innerhalb  $II_1$  liegen, ist der LINDOWSche Librationspunkt  $L_2$ . Es geht aus

der Rechnung ziemlich deutlich hervor, dass die zwei Kurven die geradlinigen Grenzen des Gebietes im Punkt  $M_1$  berühren.

Für die bei  $M_2$  und  $M_3$  liegenden Teile des Gebietes II ( $II_2$  und  $II_3$ ) gelten ähnliche Verhältnisse wie bei  $II_1$ .

Auch die Librationspunkte im Gebiet III können in derselben Weise wie die Librationspunkte in den Gebieten I und II behandelt werden. Hier wollen wir der Symmetrieverhältnisse wegen den Teil des Gebietes behandeln, der bei der Dreiecksseite  $M_2 M_3$  ( $III_1$ ) liegt.

Wird der Schwerpunkt von  $M_1$  längs der Symmetrieachse des Massendreiecks verschoben, so wird der Librationspunkt, der in  $III_1$  liegt, gleichzeitig längs der  $\xi$ -Achse vom Librationskreis  $l_1$  nach  $P_1$ , der den einen Schnittpunkt zwischen den Librationskreisen

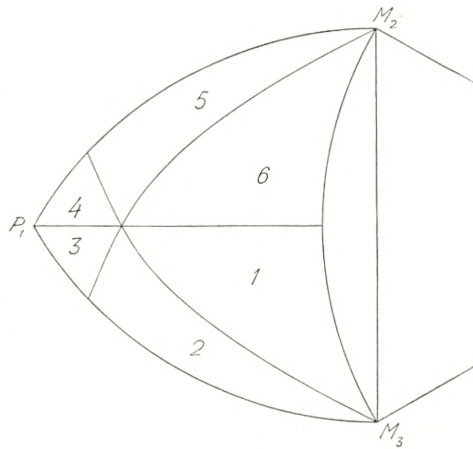


Abb. 27.

$l_2$  und  $l_3$  bildet, verschoben. Wird dagegen der Schwerpunkt längs der zwei anderen Symmetrieachsen verschoben, so wird der Librationspunkt auf den zwei Kurven, die in Abb. 27 gezeigt sind, verschoben werden. Diese zwei Kurven in Verbindung mit der  $\xi$ -Achse werden  $III_1$  in sechs Abschnitte teilen, die den sechs kongruenten Dreiecken des Massendreiecks entsprechen, wie die Zahlen in der Abbildung zeigen.

Der Schnittpunkt zwischen den zwei Kurven ist der LINDOWSCHE Librationspunkt  $L_6$ . Die Schnittpunkte zwischen den Kurven und den Librationskreisen  $l_2$  und  $l_3$  haben eine solche Lage auf den Librationskreisen, dass die zwei Bogen von den Schnittpunkten nach  $P_1$   $13^\circ 12'$  ausmachen.

Die bei  $M_1 M_2$  und  $M_1 M_3$  liegenden Teile des Gebietes III ( $III_2$  und  $III_3$ ) werden in entsprechender Weise in sechs Abschnitte geteilt werden können.

Was die mögliche Anzahl von Librationspunkten in dem vorliegenden Problem betrifft, geht nun folgendes Hauptresultat aus dem Vorhergehenden hervor:

In dem behandelten Spezialfall des Vierkörperproblems, wo die drei endlichen Massen in einem rotierenden Koordinatensystem feste Stellungen in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks einnehmen, werden 8, 9 oder 10 Librationspunkte bestehen, je nachdem der Schwerpunkt der drei endlichen Massen *ausserhalb*, *auf* oder *innerhalb* der Schwerpunktsgrenzkurve liegt. Ausserhalb des Massendreiecks liegen immer 6 Librationspunkte.

